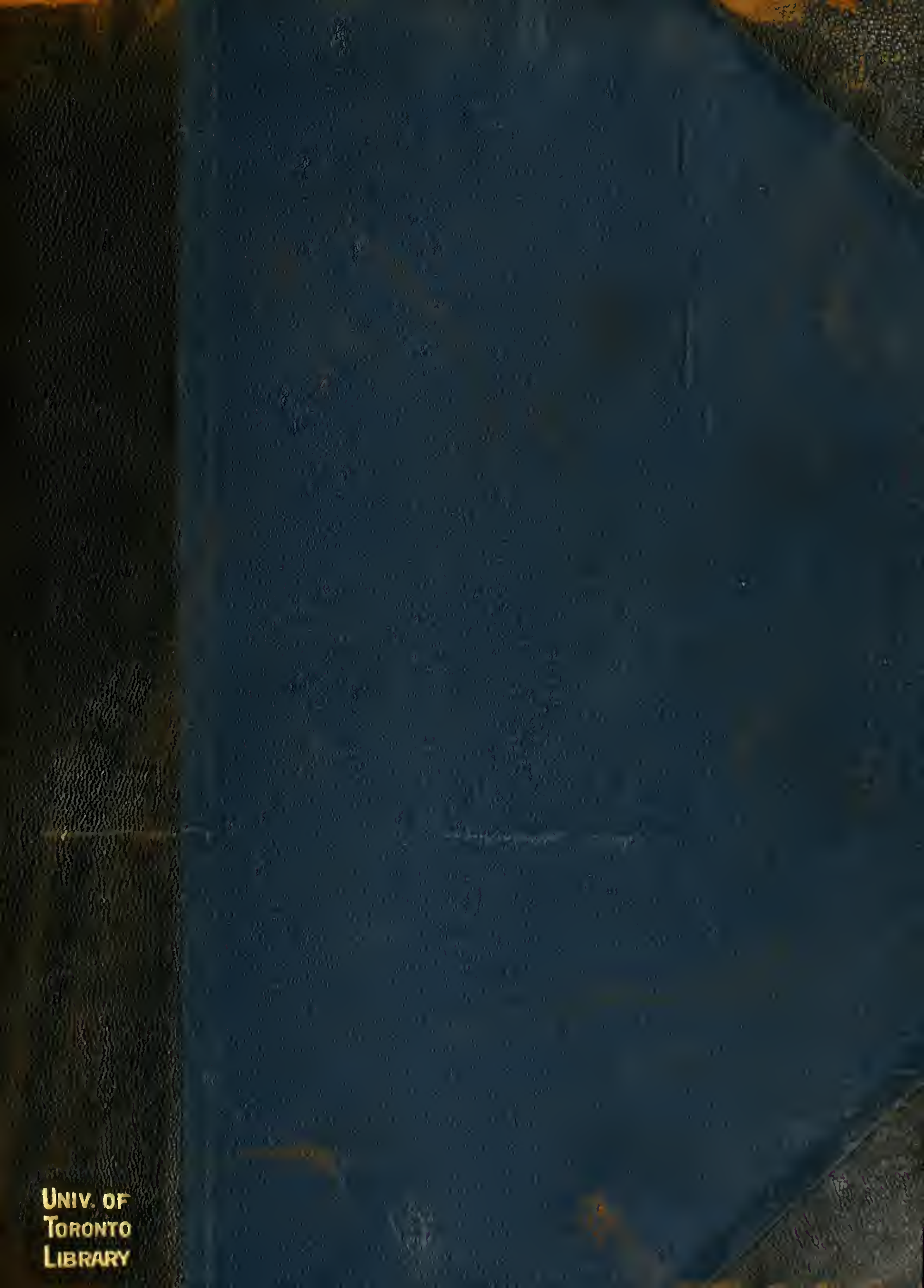

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

## SIXIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HUMBERT, M. LEVY, E. PICARD, H. POINCARÉ.

## TOME TROISIÈME. — ANNÉE 1907.

(62e Volume de la Collection.)



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

---

## *Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires;*

PAR M. CAMILLE JORDAN.

---

## DEUXIÈME PARTIE.

### RÉSEAUX DE FORMES BILINÉAIRES.

**57.** Soit

$$T_{lmn} = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma} \lambda_\alpha \mu_\beta x_\gamma$$

une forme trilinéaire par rapport aux $l$ variables $\lambda$, aux $m$ variables $\mu$, aux $n$ variables $x$.

Proposons-nous de la ramener à une forme canonique par des substitutions linéaires opérées sur chacun de ces systèmes de variables.

Cette question est analogue à celle que nous venons de traiter dans la première Partie de ce Mémoire; mais, quoique la méthode soit la même, les résultats qu'elle donne seront plus variés.

On peut écrire

$$T_{lmn} = \Sigma L_{\beta\gamma} \mu_\beta x_\gamma,$$

les L étant des fonctions linéaires des $\lambda$. S'il en existe seulement $l'$ qui soient indépendantes, on pourra les prendre pour variables indépendantes à la place d'une partie des $\lambda$ et réduire ainsi le nombre des variables du premier système qui figurent dans la forme trilinéaire.

On réduira de même, s'il y a lieu, le nombre des variables $\mu$ et celui des variables $x$.

Nous supposerons qu'aucune simplification de ce genre n'est possible. Nous dirons dans ce cas que $T_{lmn}$ est *irréductible*.

On aura alors nécessairement $l \overline{<} mn$. Car, les fonctions $L_{\beta\gamma}$ étant en nombre $mn$, il ne peut y avoir plus de $mn$ de distinctes; mais il y en a au moins $l$, par hypothèse.

On aura de même $m \overline{<} ln$, $n \overline{<} lm$.

Si donc l'un des nombres $l$, $m$, $n$, par exemple $l$, se réduit à l'unité, on aura $m = n$, et

$$T_{1nn} = \lambda \Sigma a_{\beta\gamma} \mu_\beta x_\gamma \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Cette expression peut s'écrire

$$T_{1nn} = \lambda \Sigma M_\gamma x_\gamma,$$

les $M_\gamma$ étant des fonctions distinctes des $\mu$. En les prenant pour variables indépendantes, on obtiendra l'expression canonique

$$T_{1nn} = \lambda \Sigma \mu_\gamma x_\gamma.$$

La solution du problème est beaucoup moins simple si $l$, $m$, $n$ sont tous $> 1$. Nous nous bornerons à l'étude des deux cas suivants :

1° $l = 2$;

2° $l = m = n = 3$.

## § I. — Réduction de $T_{2nn}$.

**38.** On a

$$T_{2nn} = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2,$$

$\varphi_1$, $\varphi_2$ étant bilinéaires par rapport aux $\mu$ et aux $x$.

La réduction de ce faisceau est un problème semblable à celui de la réduction d'un faisceau de formes quadratiques (première Partie, § I). Mais, les Mémoires auxquels nous avons renvoyé (n° 3) ne contenant pas la solution de cette nouvelle question sous une forme absolument explicite, il conviendra d'entrer ici dans plus de détails qu'au paragraphe I.

Nous établirons que l'on peut, par des substitutions opérées uniquement sur les $\mu$ et les $x$, ramener simultanément $\varphi_1$ et $\varphi_2$ aux formes suivantes :

$$\varphi_1 = \varphi'_1 + \varphi''_1 + \ldots, \qquad \varphi_2 = \varphi'_2 + \varphi''_2 + \ldots,$$

les systèmes *simples* $(\varphi'_1, \varphi'_2)$, $(\varphi''_1, \varphi''_2)$, ... n'ayant aucune variable commune, et les deux fonctions $\varphi'_1$, $\varphi'_2$ qui composent l'un de ces systèmes ayant l'une des quatre expressions suivantes :

$$(1) \begin{cases} \varphi'_1 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r, \\ \varphi'_2 = \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \ldots + \mu_{r+1} x_r, \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \varphi'_1 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r, \\ \varphi'_2 = \mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \ldots + \mu_r x_{r+1}, \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \varphi'_1 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r, \\ \varphi'_2 = \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \ldots + \mu_r x_{r-1} + s(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r), \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \varphi'_1 = \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \ldots + \mu_r x_{r-1}, \\ \varphi'_2 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r. \end{cases}$$

(Le coefficient $s$ qui figure dans le système (3) est un invariant. Le système (4) peut être considéré comme une dégénérescence de (3) correspondant au cas où $s = \infty$.)

**59.** *Démonstration.* — Supposons d'abord que l'une au moins des deux fonctions $\varphi_1$, $\varphi_2$, par exemple $\varphi_2$, puisse être ramenée à ne contenir qu'une partie des variables $\mu$, $x$; il en sera ainsi : 1° si $m \gtrless n$; 2° si, $m$, $n$ étant égaux, le déterminant de $\varphi_2$ est nul.

On peut en effet écrire

$$\varphi_2 = \mathrm{M}_1 x_1 + \ldots + \mathrm{M}_n x_n,$$

$M_1, \ldots, M_n$ étant des fonctions linéaires des $\mu$. Soient $M_1, \ldots, M_k$ celles de ces fonctions qui sont linéairement distinctes : $k$ sera au plus égal au plus petit des nombres $m$, $n$; il sera moindre, si, $m$, $n$ étant égaux, le déterminant est nul. Remplaçant d'ailleurs $M_{k+1}, \ldots$, par leurs valeurs en $M_1, \ldots, M_k$, il viendra

$$\varphi_2 = M_1 X_1 + \ldots + M_k X_k,$$

les X étant des fonctions des $x$, linéairement distinctes.

Prenons pour variables indépendantes les M et les X à la place d'un nombre égal des variables $\mu$ et $x$. On pourra, sans altérer la forme acquise par $\varphi_2$ :

1° Opérer une substitution linéaire quelconque sur l'un des deux systèmes de variables M, X, pourvu qu'elle soit accompagnée de la substitution inverse, effectuée sur les variables de l'autre système;

2° Altérer arbitrairement les autres variables qui par hypothèse ne figurent plus dans $\varphi_2$, et que nous désignerons par $x_1, x'_1, \ldots; m_1, m'_1, \ldots$.

Il n'existe pas nécessairement des variables de chacune des deux espèces $x_1$, $m_1$; mais il y en aura de l'une d'elles au moins. Supposons, pour fixer les idées, qu'il y en ait de l'espèce $x_1$.

**40.** Les dérivées $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial x'_1}, \cdots$ sont des fonctions linéaires des variables M et $m_1$. Elles sont distinctes, car, si elles étaient liées par une relation

$$a\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + a'\frac{\partial\varphi_1}{\partial x'_1} + \ldots = 0,$$

une substitution linéaire qui remplace $x_1, x'_1, \ldots$ par $ax_1 + \ldots$, $a'x_1 + \ldots, \ldots$ ferait disparaître $x_1$ de la fonction $\varphi_1$; le faisceau $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ ne serait donc pas irréductible.

**41.** Supposons d'abord que parmi ces dérivées il y en ait une, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}$ par exemple, qui contienne les variables $m_1, m'_1, \ldots$. Prenons-la pour variable indépendante à la place de l'une de celles-ci et appelons-la $\mu_1$; les termes de $\varphi_1$ qui contiennent $x_1$ et $\mu_1$ seront de la forme $\mu_1(x_1 + \ldots)$;

par le changement de la variable $x_1$, ils se réduiront à un seul, $\mu_1 x_1$; on aura alors $\varphi_1 = \mu_1 x_1 + \varphi'_1$, $\varphi'_1$ ne contenant plus $\mu_1$ ni $x_1$.

Nous avons ainsi ramené le système proposé $(\varphi_1, \varphi_2)$ à la somme d'un système simple $(\mu_1 x_1, 0)$ [c'est un système de l'espèce (3), où $r = 1$, $s = 0$] et d'un autre système $(\varphi'_1, \varphi_2)$ qui restera à réduire.

**42.** Supposons au contraire que les dérivées $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \cdots$ ne contiennent que les variables M. Prenons-les pour variables indépendantes à la place d'un nombre égal de celles-ci, et appelons-les $\mu_1, \mu'_1, \ldots$, en continuant d'appeler $M_1, M_2, \ldots$ les autres variables de l'espèce M, s'il en reste.

On aura à ce moment

$$\varphi_1 = \mu_1 x_1 + \mu'_1 x'_1 + \ldots + \varphi'_1,$$

$\varphi'_1$ ne contenant plus $x_1, x'_1, \ldots$. Si elle contient encore des termes en $\mu_1, \mu'_1, \ldots$, on les fera disparaître en changeant les variables $x_1$, $x'_1, \ldots$.

Quant à $\varphi_2$, elle est bilinéaire par rapport aux variables X d'une part, $\mu_1$ et M d'autre part. Son déterminant n'étant pas nul, les dérivées

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu_1}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu'_1}, \quad \ldots; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial M_1}, \quad \ldots$$

seront distinctes. Prenons-les pour variables indépendantes au lieu des X et appelons-les $x_2, x'_2, \ldots; X_1, \ldots$; l'expression de $\varphi_2$ sera devenue

$$\mu_1 x_2 + \mu'_1 x'_2 + \ldots + M_1 X_1 + \ldots = \mu_1 x_2 + \mu'_1 x'_2 + \ldots + \varphi'_2,$$

celle de $\varphi_1$ étant conservée.

**43.** On peut, sans altérer la forme des expressions obtenues :

1° Opérer sur les M une substitution quelconque accompagnée de la substitution inverse faite sur les X;

2° Opérer de même une substitution quelconque sur les $x_2, x'_2, \ldots$,

pourvu qu'on soumette les $x_1$, $x'_1$, ... à la même substitution et les $\mu_1$, $\mu'_1$, ... à la substitution inverse;

3° Enfin accroître les $x_2$ de fonctions linéaires des X, à condition d'opérer des changements correspondants convenables sur les variables M, $\mu_1$, $x_1$.

En effet, changeons, par exemple, $x_2$ en $x_2 + \alpha X_1 + \beta X_2 + \ldots$. Nous aurons introduit dans $\varphi_2$ les nouveaux termes

$$\mu_1(\alpha X_1 + \beta X_2 + \ldots).$$

Mais on pourra les détruire en changeant $M_1$, $M_2$, ... en

$$M_1 - \alpha\mu_1, \quad M_2 - \beta\mu_1, \quad \ldots.$$

Cette nouvelle opération introduira dans $\varphi_1$ des termes de la forme

$$-\mu_1\left(\alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial M_1} + \beta\frac{\partial\varphi_1}{\partial M_2} + \ldots\right)$$

qu'on détruira à leur tour en changeant $x_1$ en

$$x_1 + \alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial M_1} + \beta\frac{\partial\varphi_1}{\partial M_2} + \ldots.$$

Ces opérations vont nous permettre de réduire le système des deux fonctions partielles $\varphi'_1$, $\varphi'_2$.

44. Les dérivées $\frac{\partial\varphi'_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\varphi'_1}{\partial x'_2}$, ... sont des fonctions des variables $m$ et M. Supposons d'abord qu'elles ne soient pas distinctes. On pourra, par une substitution linéaire opérée sur les $x_2$ (et accompagnée de changements convenables opérés sur les $x_1$ et les $\mu_1$), faire disparaître une de ces variables, telle que $x_2$, de la fonction $\varphi'_1$. Si donc nous posons pour abréger

$$\mu'_1 x'_1 + \ldots + \varphi'_1 = \Phi_1, \qquad \mu'_1 x'_2 + \ldots + \varphi'_2 = \Phi_2,$$

le système $(\varphi_1, \varphi_2)$ aura été réduit à la somme du système simple $(\mu_1 x_1, \mu_1 x_2)$ et du système $(\Phi_1, \Phi_2)$ qui restera à réduire.

**45.** Supposons en second lieu que, ces dérivées étant distinctes, l'une d'elles, la première par exemple, contienne les variables $m$. Prenons-la comme variable indépendante à la place de l'une de celles-ci et désignons-la par $\mu_2$. On aura pour $\varphi_1'$ une expression de la forme

$$\mu_2(x_2 + \alpha x_2' + \ldots + \beta X_1 \ldots) + \varphi_1'',$$

$\varphi_1''$ étant indépendant de $\mu_2$ et de $x_2$. Mais, en combinant les opérations (2°) et (3°), on peut changer

$$x_2 + \alpha x_2' + \ldots + \beta X_1 + \ldots \text{ en } x_2,$$

de sorte que les variables $x_1$, $x_2$, $\mu_1$, $\mu_2$ ne paraîtront plus dans $\varphi_1$ et $\varphi_2$ que dans les termes $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$ et $\mu_1 x_2$. Nous aurons donc ici encore isolé un système simple

$$(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2,\ \mu_1 x_2).$$

**46.** Enfin, si ces dérivées sont distinctes et ne contiennent que les M, prenons-les pour variables indépendantes à la place d'une partie de celles-ci; désignons-les par $\mu_2$, $\mu_2'$, ..., en continuant d'appeler $M_1$, $M_2$, ... les autres variables M, s'il en reste. La fonction $\varphi_1'$ aura la forme

$$\mu_2(x_2 + \alpha X_1 + \ldots) + \mu_2'(x_2' + \alpha' X_1 + \ldots) + \varphi_1'',$$

$\varphi_1''$ étant indépendant de $x_2$, $x_2'$, ..., $\mu_2$, $\mu_2'$, .... Par des substitutions de l'espèce (3°), on la réduira à

$$\mu_2 x_2 + \mu_2' x_2' + \ldots + \varphi_1'',$$

de telle sorte qu'on aura

$$\varphi_1 = (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + (\mu_1' x_1' + \mu_2' x_2') + \ldots + \varphi_1'',$$
$$\varphi_2 = \mu_1 x_2 + \mu_1' x_2' + \ldots + M_1 X_1 + \ldots.$$

**47.** Par une suite de raisonnements toute semblable à la précédente, on pourra soit isoler un système simple de l'une des deux

formes

$$(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \quad \mu_1 x_2 + \mu_2 x_3),$$
$$(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, \quad \mu_1 x_2 + \mu_2 x_3),$$

soit mettre $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sous la forme

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3) + (\mu'_1 x'_1 + \mu'_2 x'_2 + \mu'_3 x'_3) + \ldots + \varphi'''_1, \\
\varphi_2 &= (\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3) \qquad\qquad + (\mu'_1 x'_2 + \mu'_2 x'_3) \qquad\qquad + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots.
\end{aligned}$$

Cette suite d'opérations ne pouvant se prolonger indéfiniment, on finira nécessairement par isoler un système simple.

**48.** Nous avons supposé, dans la démonstration qui précède, que l'une au moins des deux fonctions $\varphi_1$, $\varphi_2$ ne contienne pas toutes les variables. Cette hypothèse ne sera pas réalisée, si, $m$ étant égal à $n$, $\varphi_1$ et $\varphi_2$ ont des déterminants différents de zéro.

Considérons dans ce cas, au lieu de $\varphi_2$, la fonction $\psi_2 = \varphi_2 - s\varphi_1$, la constante $s$ étant choisie de telle sorte que le déterminant de $\psi_2$ soit nul. Cette condition fournit pour $s$ une équation de degré $n$. Ayant pris pour $s$ une racine de cette équation, on pourra, en appliquant à $\varphi_1$ et $\psi_2$ la méthode précédente, extraire du système $(\varphi_1, \psi_2)$ un ou plusieurs systèmes simples. Puisque $\varphi_1$ contient par hypothèse toutes les variables, chacun de ces systèmes devra être de la forme

$$\varphi'_1 = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_r x_r, \qquad \psi'_2 = \mu_2 x_1 + \ldots + \mu_r x_{r-1}.$$

On pourra donc, du système

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, \psi_2 + s\varphi_1),$$

extraire le système simple

$$(\varphi'_1, \psi'_2 + s\varphi'_1),$$

lequel est de l'espèce (3).

**49.** L'expression réduite du système $(\varphi_1, \varphi_2)$ à laquelle nous

sommes arrivés en modifiant les seules variables $\mu$ et $x$, contient autant d'invariants que l'équation en $s$ a de racines distinctes. Mais, si l'on soumet aussi les variables $\lambda$ à des substitutions linéaires, on pourra donner des valeurs arbitrairement choisies à trois de ces invariants.

Soit en effet $(\varphi'_1, \varphi'_2)$ un de nos systèmes simples. Le changement de $\lambda_1, \lambda_2$ en $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2, \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2$ changera $\lambda_1\varphi'_1 + \lambda_2\varphi'_2$ en

$$\lambda_1(\alpha\varphi'_1 + \gamma\varphi'_2) + \lambda_2(\beta\varphi'_1 + \delta\varphi'_2).$$

Supposons d'abord que le système simple considéré soit de l'espèce (1)

$$\varphi'_1 = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_r x_r, \qquad \varphi'_2 = \mu_2 x_1 + \ldots + \mu_{r+1} x_r.$$

L'effet de la substitution opérée sur les $\lambda$ pourra être contrebalancé par d'autres substitutions opérées sur les $\mu$ et les $x$.

En effet, les substitutions qu'on peut faire subir aux $\lambda$ dérivent des trois opérations élémentaires suivantes :

1° Multiplication de $\lambda_1, \lambda_2$ par une même constante. Divisons les $x$ par cette même constante ; $\lambda_1\varphi'_1 + \lambda_2\varphi'_2$ restera inaltéré.

2° Échange de $\lambda_1$ et de $\lambda_2$. On n'aura qu'à remplacer $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r+1}, x_1, \ldots, x_r$ par $\mu_{r+1}, \mu_r, \ldots, \mu_1, x_r, \ldots, x_1$.

3° Changement de $\lambda_1$ en $\lambda_1 + t\lambda_2$ ; $\varphi'_1$ ne sera pas altéré, et $\varphi'_2$ sera changé en

$$\varphi'_2 + t\varphi'_1 = (\mu_2 + t\mu_1)x_1 + (\mu_3 + t\mu_2)x_2 + \ldots + (\mu_{r+1} + t\mu_r)x_r.$$

Cette expression est un cas particulier de la suivante :

$$(\mu_2 + a\mu_1)x_1 + (\mu_3 + b\mu_2 + c\mu_1)x_2 + \ldots + (\mu_{r+1} + k\mu_r + \ldots + l\mu_1)x_r$$

qu'on ramène aisément à $\varphi'_2$ par des substitutions qui n'altèrent pas $\varphi'_1$. En effet, on fera disparaître d'abord le terme $a\mu_1 x_1$ en changeant $\mu_2, x_1$ en $\mu_2 - a\mu_1$, $x_1 + ax_2$ ; puis, sans rétablir ce terme supprimé, on fera évanouir les termes $(b\mu_2 + c\mu_1)x_2$ en changeant $\mu_3, x_2, x_1$ en $\mu_3 - b\mu_2 - c\mu_1$, $x_2 + bx_3$, $x_1 + cx_3$ ; etc. Enfin, en modifiant $\mu_{r+1}$, on fera disparaître les derniers termes $(k\mu_r + \ldots + l\mu_1)x_r$.

Les mêmes considérations s'appliquent aux systèmes simples de la forme (2) qui ne diffèrent des précédents que par l'échange des $\mu$ avec les $x$.

**50**. Supposons enfin que le système simple considéré soit de la forme (3)

$$\varphi'_1 = \mathrm{A}, \qquad \varphi'_2 = \mathrm{B} + s\mathrm{A},$$

en posant pour abréger

$$\mathrm{A} = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_r x_r, \qquad \mathrm{B} = \mu_2 x_1 + \ldots + \mu_r x_{r-1}.$$

Soient $a$, $b$, $c$ des constantes quelconques ($a$, $c$ n'étant pas nuls). Il est aisé de vérifier que $a\mathrm{A} + b\mathrm{B}$, $c\mathrm{B}$ peuvent être transformés simultanément en A, B.

Posons en effet $a = \alpha c$, $b = \beta c$. Par le changement de $\mu_k$, $x_k$ en $\alpha^{k+1}\mu_k$, $c^{-1}\alpha^k x_k$, on transformera tout d'abord $a\mathrm{A} + b\mathrm{B}$, $c\mathrm{B}$ en $\mathrm{A} + \beta\mathrm{B}$, B. On peut ensuite, sans altérer B, transformer en A l'expression $\mathrm{A} + \beta\mathrm{B}$, ou plus généralement l'expression

$$\mu_1 x_1 + \mu_2(x_2 + a x_1) \\ + \mu_3(x_3 + b x_2 + c x_1) + \ldots + \mu_r(x_r + k x_{r-1} + \ldots + l x_1)$$

dont elle est un cas particulier.

En effet, on fera disparaître le terme $a x_1$ par le changement de $x_2$, $\mu_2$ en $x_2 - a x_1$, $\mu_2 + a\mu_3$; puis les termes $b x_2 + c x_1$ en changeant $x_3$, $\mu_2$, $\mu_1$ en $x_3 - b x_2 - c x_1$, $\mu_2 + b\mu_4$, $\mu_1 + c\mu_4$, etc.; et enfin les termes $k x_{r-1} + \ldots + l x_1$ par le changement de $x_r$.

De ce résultat, semblable à celui trouvé au n° 5 (pour les fonctions $\mathrm{A}''_x$, $\mathrm{B}''_x$), on peut tirer la même conséquence, à savoir qu'un changement de variables $\lambda_1$, $\lambda_2$ (combiné à des substitutions convenables opérées sur les $\mu$ et sur les $x$) a pour effet d'opérer sur les invariants $s$ une même transformation homographique, ce qui permettra d'assigner à trois d'entre eux des valeurs déterminées, telles que $0$, $\infty$, $1$.

En dressant, d'après ce qui précède, le Tableau des types canoniques pour chaque système de valeurs de $m$, $n$, on devra, pour éviter les doubles emplois, assigner, par des considérations toutes semblables

à celles du n° **9**, un ordre de succession bien défini aux invariants $s$, $s'$, ..., et réduire le premier à zéro, le second à $\infty$, le troisième à l'unité.

**31.** On obtient ainsi le Tableau suivant :

Pour $m=2$, $n=1$, un type

(A) $$\lambda_1\mu_1x_1+\lambda_2\mu_2x_1.$$

Pour $m=1$, $n=2$, un type

(B) $$\lambda_1\mu_1x_1+\lambda_2\mu_1x_2.$$

Pour $m=2$, $n=2$, deux types :

(C) $$\lambda_1\mu_1x_1 \qquad\qquad +\lambda_2\mu_2x_2,$$

(D) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2)+\lambda_2\mu_2x_1.$$

Pour $m=3$, $n=2$, deux types :

(E) $$\lambda_1\mu_1x_1 \qquad\qquad +\lambda_2(\mu_2x_1+\mu_3x_2),$$

(F) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2)+\lambda_2(\mu_2x_1+\mu_3x_2).$$

Pour $m=2$, $n=3$, deux types (déduits des précédents par l'échange des $\mu$ avec les $x$) :

(G) $$\lambda_1\mu_1x_1 \qquad\qquad +\lambda_2(\mu_1x_2+\mu_2x_3),$$

(H) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2)+\lambda_2(\mu_1x_2+\mu_2x_3).$$

Pour $m=3$, $n=3$, six types :

(I) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_3x_2) \qquad\qquad +\lambda_2(\mu_2x_1+\mu_3x_3),$$

(J) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_3x_3)+\lambda_2(\mu_2x_1+\mu_3x_2),$$

(K) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_3x_3)+\lambda_2\mu_2x_1,$$

(L) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2) \qquad\qquad +\lambda_2(\mu_2x_1+\mu_3x_3),$$

(M) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2) \qquad\qquad +\lambda_2\mu_3x_3,$$

(N) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_3x_3) \qquad\qquad +\lambda_2(\mu_2x_2+\mu_3x_3),$$

etc.

## § II. — Réduction de $T_{333}$.

**52.** L'expression

$$T_{333} = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\alpha \mu_\beta x_\gamma = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3$$

représente un réseau de formes bilinéaires des variables $\mu$ et $x$, dérivé des trois formes génératrices $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$. Une substitution linéaire effectuée sur les paramètres $\lambda$ revient à changer le choix de ces formes génératrices.

A chaque point $P = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ du plan des $\lambda$ correspond une forme du réseau (définie à un facteur près). Son déterminant $\Delta$ est homogène et du troisième degré en $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$. Les formes de déterminant nul correspondent donc aux points d'une cubique, $\Delta = 0$. L'une quelconque d'entre elles pourra, par un choix convenable des variables $\mu$ et $x$, s'exprimer par une somme de deux termes

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2.$$

Si non seulement $\Delta$, mais tous ses mineurs sont nuls, elle sera réductible à un monome

$$\mu_1 x_1.$$

Mais le réseau ne contiendra de telles formes que dans certains cas exceptionnels.

Soient $P_1$, $P_2$ deux points quelconques; $\psi_1$, $\psi_2$ les formes correspondantes. Aux divers points de la droite $\omega = P_1 P_2$ correspondront les formes du faisceau

$$l_1 \psi_1 + l_2 \psi_2,$$

que nous appellerons le *faisceau de la droite* $\omega$.

Si parmi les six dérivées $\frac{\partial\psi_1}{\partial x_k}$, $\frac{\partial\psi_2}{\partial x_k}$ il y en a $p$ linéairement distinctes; si, d'autre part, parmi les six dérivées $\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu_k}$, $\frac{\partial\psi_2}{\partial\mu_k}$ il y en a $q$ distinctes, on pourra choisir les variables de telle sorte que dans les expressions de $\psi_1$ et de $\psi_2$ figurent seulement $p$ des variables $\mu$, et $q$ des variables $x$.

Si $p = q = 3$, le faisceau sera irréductible, et pourra être ramené à l'une des six formes canoniques I, J, ..., N du nº **31**. Dans le cas contraire, il pourra se ramener à l'une des huit formes A, B, ..., H du même numéro.

Nous dirons que la droite considérée est de l'espèce (A), (B), etc., suivant que son faisceau a pour expression réduite A ou B, etc. Et nous considérerons l'espèce (A) comme plus simple que l'espèce (B); celle-ci sera plus simple que l'espèce (C), etc.

Aux points d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec la cubique $\Delta$ correspondent celles des formes du faisceau

$$l_1\psi_1 + l_2\psi_2$$

dont le déterminant est nul. Ce déterminant est homogène et du troisième degré en $l_1$, $l_2$.

Si $\mathcal{D}$ est de l'espèce (N), ce déterminant se réduit à $l_1 l_2(l_1 + l_2)$. Il y a trois points d'intersection distincts, et les formes correspondantes sont $\psi_2$, $\psi_1$, $\psi_1 - \psi_2$.

Si $\mathcal{D}$ est l'une des espèces (L) ou (M), ce déterminant se réduit à $l_1^2 l_2$. Deux intersections sont réunies au point dont la forme est $\psi_2$; le dernier point d'intersection a pour forme $\psi_1$.

Si $\mathcal{D}$ est de l'une des espèces (J), (K), le déterminant étant égal à $l_1^3$, les trois intersections se confondent en un seul point.

Enfin, si $\mathcal{D}$ est de l'une des espèces (A), (B), ..., (I), le déterminant étant identiquement nul, la droite $\mathcal{D}$ appartiendra tout entière à la cubique $\Delta$.

Ces préliminaires posés, pour opérer la réduction du réseau à sa forme canonique, nous choisirons les côtés $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ du triangle de référence de la même manière qu'au nº **15**, et nous aurons plusieurs cas à discuter successivement.

**35.** Premier cas : $\Delta$ *indécomposable, sans rebroussement.*

La droite $\lambda_3$ rencontrant $\Delta$ en trois points d'inflexion distincts, son faisceau F sera du type (N).

Changeons, pour plus de symétrie, les signes de $x_3$ et de $\lambda_2$, nous pourrons écrire

$$F = \lambda_1(\mu_1 x_1 - \mu_3 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_3 - \mu_2 x_2) = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2.$$

Ce faisceau contient trois formes de déterminant nul

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad -(\varphi_1+\varphi_2) = \mu_2 x_2 - \mu_1 x_1$$

correspondant aux trois points d'inflexion situés sur $\lambda_3$.

Soit

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik}\mu_i x_k$$

la troisième forme génératrice du réseau. On aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_3+\lambda_1 & a_{21}\lambda_3 & a_{31}\lambda_3 \\ a_{12}\lambda_3 & a_{22}\lambda_3-\lambda_2 & a_{32}\lambda_3 \\ a_{13}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3-\lambda_1+\lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Mais, $\lambda_1$, $\lambda_2$ étant des tangentes d'inflexion, $\Delta$ doit se réduire à la forme

$$A\lambda_3^3 + \lambda_1\lambda_2(B\lambda_1 + C\lambda_2 + D\lambda_3);$$

d'où les équations de condition

$$a_{11} = 0, \qquad a_{22} = 0,$$
$$a_{12}a_{21} = a_{23}a_{32} = a_{31}a_{13}.$$

Les deux produits $a_{12}a_{23}a_{31}$ et $a_{21}a_{32}a_{13}$ ne peuvent être nuls à la fois; car on aurait, en achevant l'identification, $A = 0$; $\Delta$ ne serait donc pas indécomposable.

D'ailleurs, ces deux produits s'échangent entre eux, si l'on permute les indices 1 et 2 en changeant en même temps le signe de $\lambda_1$, $\lambda_2$ (ce qui n'altère pas l'expression de F). Il est donc permis de supposer que $a_{12}a_{23}a_{31}$ n'est pas nul.

On peut encore, sans altérer F, multiplier $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ par des facteurs de proportionnalité $t_1$, $t_2$, $t_3$, $u_1$, $u_2$, $u_3$, $v$, $v$ satisfaisant aux relations

$$t_1 u_1 = t_2 u_2 = t_3 u_3 = \frac{1}{v}$$

et du reste arbitraires. Par cette opération, $a_{ik}$ sera multiplié par $t_i u_k$;

les produits $a_{12}a_{21}$, $a_{23}a_{32}$, $a_{31}a_{13}$ par $\frac{1}{v^2}$, $a_{33}$ par $\frac{1}{v}$, et l'on pourra réduire $a_{12}$, $a_{23}$, $a_{31}$ à l'unité. Nous devrons poser à cet effet les équations

$$a_{12}t_1u_2 = a_{23}t_2u_3 = a_{31}t_3u_1 = 1$$

ou, en tirant les $u$ des équations précédentes,

$$a_{12}t_1 = vt_2, \qquad a_{23}t_2 = vt_3, \qquad a_{31}t_3 = vt_1.$$

Ces équations détermineront les rapports $t_1 : t_2 : t_3$, si $v$ satisfait à la relation

$$v^3 = a_{12}a_{23}a_{31}.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{a_{12}a_{21}}{v^2} = \rho, \qquad \frac{a_{33}}{v} = \sigma,$$

les coefficients $a_{21}$, $a_{32}$, $a_{13}$ seront réduits à $\rho$ et $a_{33}$ à $\sigma$.

Nous obtenons ainsi pour $\varphi_3$ une expression canonique

$$\varphi_3 = \mu_1(x_2 + \rho x_3) + \mu_2(\rho x_1 + x_3) + \mu_3(x_1 + \rho x_2 + \sigma x_3)$$

aux deux invariants $\rho$, $\sigma$.

Remarquons, toutefois, que, $v$ étant donné par une équation cubique, $\rho$ et $\sigma$ ne sont pas rigoureusement déterminés. On pourrait les remplacer par $\theta\rho$, $\theta^2\sigma$, $\theta$ étant une racine cubique de l'unité.

Il existe, d'ailleurs, autant de manières distinctes de réduire le réseau à une forme canonique de l'espèce précédente que $\Delta$ possède de couples de points d'inflexion, soit 36 dans le cas général et 3 si $\Delta$ a un point double. Ces divers modes de réduction donneront en général des valeurs différentes pour $\rho$ et $\sigma$.

**54.** Voyons en particulier comment se modifient ces invariants lorsqu'on permute les trois points d'inflexion situés sur une même droite $\lambda_3$ et les tangentes correspondantes.

1° Échangeons d'abord $\lambda_1$ et $\lambda_2$. Le réseau

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3$$

sera changé en

$$\lambda_1\varphi_2 + \lambda_2\varphi_1 + \lambda_3\varphi_3.$$

Or, si nous changeons

$\mu_1,\ \mu_2,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \lambda_3$ en $\mu_2;\ \mu_1,\ -x_2,\ -x_1,\ -x_3,\ -\frac{1}{\rho}\lambda_3$

$\varphi_2$ s'échange avec $\varphi_1$, et $\lambda_3\varphi_3$ se transforme en $\lambda_3\varphi'_3$, $\varphi'_3$ étant la fonction qui se déduit de $\varphi_3$ par le changement de $\rho$, $\sigma$ en $\frac{1}{\rho}$, $\frac{\sigma}{\rho}$.

2° On arrive au même résultat si l'on remplace la droite $\lambda_1$ par la tangente au troisième point d'inflexion.

Le déterminant $\Delta$ étant ici égal à

$$(\rho^3 - \rho\sigma + 1)\lambda_3^3 + \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2 - \sigma\lambda_3),$$

cette dernière tangente aura pour équation

$$\lambda_1 - \lambda_2 - \sigma\lambda_3 = 0.$$

A l'ancien triangle de référence $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ nous substituons celui formé par les trois droites

$$(\lambda_1 - \lambda_2 - \sigma\lambda_3,\ \lambda_2,\ \lambda_3).$$

Les formes correspondantes à ses sommets seront :

$$\varphi'_1 = \varphi_1 \qquad\quad = \mu_1 x_1 - \mu_3 x_3,$$
$$\varphi'_2 = \varphi_1 + \quad \varphi_2 = \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2,$$
$$\varphi'_3 = \varphi_3 + \sigma\varphi_1 = \mu_1(\sigma x_1 + x_2 + \rho x_3) + \mu_2(\rho x_1 + x_3) + \mu_3(x_1 + \rho x_2).$$

Si nous changeons $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \mu_1,\ \mu_3$ en $-x_3,\ -x_2,\ -x_1,\ \mu_3,\ \mu_1$ les deux premières se transforment respectivement en $\varphi_1$, $-\varphi_2$ et la dernière devient le produit de la constante $-\rho$ par

$$\mu_1\left(x_2 + \frac{1}{\rho}x_3\right) + \mu_2\left(\frac{1}{\rho}x_1 + x_3\right) + \mu_3\left(x_1 + \frac{1}{\rho}x_2 + \frac{\sigma}{\rho}x_3\right).$$

C'est une expression analogue à $\varphi_3$, mais où $\rho$, $\sigma$ sont remplacés par $\frac{1}{\rho}$, $\frac{\sigma}{\rho}$.

55. Quelques cas particuliers méritent d'être signalés :

1° Si $\sigma = 0$, les trois tangentes d'inflexion sont concourantes;

2° $\Delta$ aura un point double, si l'on a

$$27(\rho^3 - \rho\sigma + 1) + \sigma^3 = 0;$$

3° Le réseau contiendra une forme monome si l'on peut déterminer les $\lambda$ de telle sorte que tous les mineurs du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \rho\lambda_3 \\ \rho\lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \rho\lambda_3 & \sigma\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2 \end{vmatrix}$$

soient nuls.

Cela donne, entre autres équations de condition, celles-ci :

$$\lambda_3(\lambda_3 + \rho\lambda_2) = 0, \qquad \lambda_3(\rho^2\lambda_3 + \lambda_2) = 0.$$

Si $\lambda_3$ était nul, les autres équations donneraient

$$\lambda_1\lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2) = 0, \qquad \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) = 0;$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ce qui est inadmissible.

On doit donc avoir

$$\lambda_3 + \rho\lambda_2 = 0, \qquad \rho^2\lambda_3 + \lambda_2 = 0;$$

d'où

$$\rho^3 = 1, \qquad \lambda_3 = -\rho\lambda_2.$$

Il viendra ensuite

$$0 = \lambda_1\lambda_2 + \rho\lambda_3^2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Mais $\lambda_2 = 0$ donnerait $\lambda_3 = 0$, solution rejetée. Donc $\lambda_1 = -\lambda_2$.

Enfin, l'équation

$$\lambda_2(\sigma\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2) + \rho\lambda_3^2 = 0$$

deviendra

$$0 = \lambda_2^2(-\rho\sigma + 2 + 1);$$

d'où

$$\sigma = 3\rho^2.$$

On vérifie aisément que ces valeurs de $\rho$ et de $\sigma$ et des rapports $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ annulent bien tous les mineurs de $\Delta$.

**56.** 4° Pour que $\Delta$ soit indécomposable, ainsi que nous l'avons supposé, il faut que le coefficient de $\lambda_3^3$

$$\rho^3 - \rho\sigma + 1$$

soit $\gtrless$ o. S'il était nul, $\Delta$ serait le produit des trois droites

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_1 - \lambda_2 - \sigma\lambda_3.$$

Les faisceaux de ces droites

$$\lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3, \quad \lambda_1\varphi_1 + \lambda_3\varphi_3, \quad \lambda_2(\varphi_2 + \varphi_1) + \lambda_3(\varphi_3 + \sigma\varphi_1)$$

sont irréductibles. Considérons, en effet, le premier. Les dérivées

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = -\mu_2, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} = \mu_3, \qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} = -\mu_1$$

sont linéairement distinctes. De même pour les dérivées

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial \mu_2} = -x_2, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial \mu_3} = x_3, \qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} = -x_1.$$

La même vérification peut se faire pour les deux autres faisceaux.

Réciproquement, tout réseau où $\Delta$ se décompose en trois droites $D_1$, $D_2$, $D_3$, dont les faisceaux soient irréductibles, pourra d'une infinité de manières être ramené à la forme réduite ci-dessus, les invariants étant liés par la relation $\rho^3 - \rho\sigma + 1 = 0$.

Soit, en effet, $\delta$ une droite arbitraire coupant $D_1$, $D_2$, $D_3$ en trois points distincts, qu'on peut considérer comme des points d'inflexion, où $D_1$, $D_2$, $D_3$ seront les tangentes. Si donc nous prenons $D_1$, $D_2$, $\delta$ pour les côtés $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ du triangle de référence, on pourra donner aux formes génératrices du réseau les expressions suivantes :

$$\varphi_1 = \mu_1 x_1 - \mu_3 x_3, \qquad \varphi_2 = \mu_3 x_3 - \mu_2 x_2, \qquad \varphi_3 = \Sigma a_{ik}\mu_i x_k$$

et, $\Delta$ devant se réduire à la forme

$$\lambda_1 \lambda_2 (B\lambda_1 + C\lambda_2 + D\lambda_3);$$

on aura les relations

$$a_{11} = a_{22} = 0, \qquad a_{12}a_{21} = a_{23}a_{32} = a_{31}a_{13},$$

et l'on pourra achever la réduction de $\varphi_3$ comme nous l'avons fait, à moins que les produits $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$ ne soient nuls tous les deux. Mais ce cas ne peut se présenter si les faisceaux

$$\lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3, \qquad \lambda_1\varphi_1 + \lambda_3\varphi_3$$

des droites $\lambda_1$, $\lambda_2$ sont irréductibles, ainsi que nous le supposons. Il faudra, en effet, que $\varphi_3$ contienne les variables $\mu_2$, $x_2$ qui ne figurent pas dans $\varphi_2$, et aussi $\mu_1$, $x_1$, qui ne figurent pas dans $\varphi_1$. On ne pourra donc avoir à la fois ni $a_{12} = a_{13} = 0$, ni $a_{21} = a_{23} = 0$, ni $a_{21} = a_{31} = 0$, ni $a_{12} = a_{32} = 0$.

Mais d'autre part, si l'un des produits $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$ est nul, les produits égaux $a_{12}a_{21}$, $a_{23}a_{32}$, $a_{31}a_{13}$ le seront aussi, et, comme on peut permuter les indices 1 et 2, il est permis d'admettre que $a_{21} = 0$.

Mais alors les conditions précédentes donneront successivement

$a_{23} \gtrless 0$, $a_{31} \gtrless 0$, puis $a_{32} = 0$, $a_{13} = 0$ et enfin $a_{12} \gtrless 0$, d'où $a_{12}a_{23}a_{31} \gtrless 0$.

Il ne convient pas toutefois d'adopter comme type canonique des réseaux où $\Delta$ est formé de trois droites dont les faisceaux soient irréductibles l'expression réduite que nous venons de trouver. Car, la réduction pouvant se faire d'une infinité de manières, on ne saurait pas décider si deux réseaux sont équivalents ou non par la comparaison de leurs réduites (lesquelles contiennent une indéterminée). Il sera préférable d'employer un autre procédé de réduction exempt d'ambiguïté. Nous le donnerons plus loin, et il nous conduira à des expressions beaucoup plus simples que la précédente.

Nous maintiendrons donc l'inégalité

$$\rho^3 - \rho\sigma + 1 \gtrless 0$$

comme partie intégrante de la définition du premier type canonique

$$\text{(I)}\quad \lambda_1(\mu_1 x_1 - \mu_3 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_3 - \mu_2 x_2) + \lambda_3[\mu_1(x_2 + \rho x_3) + \mu_2(\rho x_1 + x_3) + \mu_3(x_1 + \rho x_2 + \sigma x_3)].$$

57. Deuxième cas : $\Delta$ *est indécomposable, mais possède un point de rebroussement* P *et un point d'inflexion* Q.

Prenons pour $\lambda_1$, $\lambda_2$ les tangentes à $\Delta$ aux points Q et P, pour $\lambda_3$ la droite PQ ; $\Delta$ sera de la forme

$$A\lambda_3^3 + B\lambda_1^2\lambda_2 \qquad (\text{A et B} \gtrless 0).$$

D'autre part, $\lambda_3$ rencontrant $\Delta$ en deux points confondus en $P = (\lambda_2\lambda_3)$, et au point $Q = (\lambda_1\lambda_3)$, son faisceau F appartiendra à l'un des deux types (L), (M), ou, en changeant $x_1$, $x_2$ en $x_2$, $-x_1$, à l'un des deux types

$$(\text{L})' \qquad F = \lambda_1(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1) + \lambda_2(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3),$$

$$(\text{M})' \qquad F = \lambda_1(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1) + \lambda_2\mu_3 x_3.$$

Discutons successivement ces deux hypothèses.

58. 1° Supposons F de la forme (L)'.

Soit

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik}\mu_i x_k$$

la troisième forme génératrice correspondant au sommet $(\lambda_2\lambda_3)$ du triangle de référence : on aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_3 & a_{21}\lambda_3 - \lambda_1 & a_{31}\lambda_3 \\ a_{12}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{22}\lambda_3 + \lambda_2 & a_{32}\lambda_3 \\ a_{13}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 + \lambda_2 \end{vmatrix},$$

expression à identifier avec $A\lambda_3^3 + B\lambda_1^2\lambda_2$.

On en déduit d'abord

$$a_{11} = a_{33} = 0, \qquad a_{21} = a_{12},$$

puis, en tenant compte de ces premières relations,

$$a_{12}a_{21} + a_{31}a_{13} = 0,$$

$$a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23} = 0,$$

$$a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22} = A \gtrless 0.$$

Donc $a_{12}$, $a_{21}$, $a_{31}a_{13}$ seront $\gtrless 0$. Car, si l'une de ces quantités était nulle, les deux autres le seraient aussi; donc A serait nul, et $\Delta$ décomposable.

Mais on peut supposer $a_{22} = 0$. Changeons en effet $\mu_1$, $x_1$ en $\mu_1 + t\mu_2$, $x_1 + tx_2$, ce qui n'altère pas F; $a_{22}$ sera changé en $a_{22} + t(a_{12} + a_{21})$, expression qui s'annulera pour une valeur convenable de la constante $t$.

Changeons enfin $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ en $t_1\mu_1$, $t_2\mu_2$, $t_3\mu_3$, $u_1x_1$, $u_2x_2$, $u_3x_3$, $\frac{\lambda_1}{t_1u_2}$, $\frac{\lambda_2}{t_2u_2}$, les indéterminées $t$, $u$ étant liées par les relations

$$t_1u_2 = t_2u_1, \qquad t_2u_2 = t_3u_3.$$

F restera inaltéré, et $a_{12}$, $a_{13}$, $a_{32}$ seront multipliés par les facteurs arbitraires

$$t_1u_2, \qquad t_1u_3 = \frac{t_1t_2}{t_3}u_2, \qquad t_3u_2.$$

On pourra donc les choisir de manière à réduire à l'unité $a_{12}$, $a_{13}$ et aussi $a_{32}$, s'il n'est pas nul. Les équations de condition donneront les valeurs des autres coefficients.

$$a_{21} = a_{12} = 1, \qquad a_{31} = -a_{13} = -1, \qquad a_{23} = a_{32} = 1 \text{ ou } 0.$$

Nous obtenons ainsi les deux types réduits :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1x_2 - \mu_2x_1) + \lambda_2(\mu_2x_2 + \mu_3x_3) \\ \qquad + \lambda_3[\mu_1(x_2 + x_3) + \mu_2(x_1 + x_3) + \mu_3(-x_1 + x_2)], \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1x_2 - \mu_2x_1) + \lambda_2(\mu_2x_2 + \mu_3x_3) \\ \qquad\qquad + \lambda_3[\mu_1(x_2 + x_3) + \mu_2x_1 - \mu_3x_1]. \end{cases}$$

Ces deux types sont bien distincts : on peut d'ailleurs le confirmer comme il suit :

Changeons le rôle des $\lambda$ et des $\mu$ en considérant $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3$ comme une forme bilinéaire des variables $\lambda$, $x$, dépendant des paramètres $\mu$; son déterminant sera une cubique $\Delta'(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ analogue à $\Delta$. Or on aura pour le type (II)

$$\Delta' = -\mu_1(\mu_2^2 + \mu_3^2) + \mu_2(\mu_3^2 - \mu_2^2),$$

cubique à un seul point double; et pour le type (III)

$$\Delta' = -\mu_1(\mu_2^2 + \mu_3^2),$$

système de trois droites.

**59.** 2° Supposons F de la forme (M)'.

Son expression ne changera pas si l'on opère sur $\mu_1$, $\mu_2$ et sur $x_1$, $x_2$ une même substitution linéaire, en divisant $\lambda_1$ par le déterminant de cette substitution. Par cette opération on pourra, dans l'expression de la troisième forme génératrice

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik}\mu_i x_k,$$

rendre nul le coefficient $a_{11}$. En effet, par le changement de $\mu_2$, $x_2$ en $\mu_2 + t\mu_1$, $x_2 + tx_1$ on le change en $a_{11} + t(a_{12} + a_{21}) + t^2 a_{22}$, expression qu'on pourra rendre nulle si $a_{22} \gtrless 0$. Si $a_{22}$ était nul, on l'échangerait avec $a_{11}$ en permutant $\mu_1$, $x_1$ avec $\mu_2$, $x_2$.

Soit donc $a_{11} = 0$. On aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{21}\lambda_3 - \lambda_1 & a_{31}\lambda_3 \\ a_{12}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{22}\lambda_3 & a_{32}\lambda_3 \\ a_{13}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 + \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Identifiant cette expression avec $A\lambda_3^3 + B\lambda_1^2\lambda_2$, il viendra

$$a_{33} = 0, \qquad a_{12} = a_{21}, \qquad a_{12}a_{21} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad a_{12} = a_{21} = 0,$$
$$a_{23}a_{31} - a_{32}a_{13} = 0, \qquad a_{13}a_{22}a_{31} = A \gtrless 0.$$

Multiplions $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ par $l_1$, $l_2$, $l_3$, $u_1$, $u_2$, $u_3$,

$\frac{1}{t_1 u_2}$, $\frac{1}{t_3 x_3}$, les facteurs $t$, $u$ étant liés par l'unique relation $t_1 u_2 = t_2 u_1$. On pourra les déterminer de manière à réduire à l'unité $a_{13}$, $a_{22}$, $a_{31}$, et aussi $a_{32}$, si ce dernier coefficient n'est pas nul. Les relations précédentes donneront enfin $a_{23} = a_{32}$.

Assignant successivement à $a_{32}$ les valeurs 1 et 0, nous obtiendrons les deux types réduits :

$$\text{(IV)}\ \lambda_1(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1) + \lambda_2 \mu_3 x_3 + \lambda_3[\mu_1 x_3 + \mu_2(x_2 + x_3) + \mu_3(x_1 + x_2)],$$

$$\text{(V)}\ \lambda_1(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1) + \lambda_2 \mu_3 x_3 + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1).$$

Chacun d'eux contient une droite monome $\lambda_2$; les réseaux des types (II) et (III) n'en contenaient aucune.

Formons, d'autre part, comme au numéro précédent, la cubique $\Delta'(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ analogue à $\Delta$; on aura pour le type (IV)

$$\Delta' = \mu_3(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_2 \mu_3) \qquad \text{(droite et conique)},$$

et pour le type (V)

$$\Delta' = \mu_3(\mu_1^2 + \mu_2^2) \qquad \text{(trois droites)}.$$

Ce caractère invariant distingue nettement ces deux types l'un de l'autre.

**60.** Passons à l'examen des cas où $\Delta$ est décomposable ou identiquement nul.

Troisième cas : $\Delta$ *admet en facteur une droite d'espèce* (A).

Prenons-la pour $\lambda_3$. Son faisceau F aura pour expression

$$F = \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_1 = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2.$$

Soit

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik} \mu_i x_k$$

la troisième forme génératrice. Nous pourrons la simplifier par les opérations suivantes qui n'altèrent pas F :

1° On peut remplacer $\varphi_3$ par une autre forme $\varphi_3 - t\varphi_1 - u\varphi_2$;

2° Changer arbitrairement les variables $\mu_3$, $x_2$, $x_3$ que F ne contient pas;

3° Opérer sur $\mu_1$, $\mu_2$ une substitution linéaire arbitraire (accompagnée de la substitution inverse effectuée sur $\lambda_1$ et $\lambda_2$).

**61**. Supposons d'abord $a_{33} \gtrless 0$. Par les opérations (2) on réduira $a_{33}$ à l'unité, $a_{13}$, $a_{23}$, $a_{31}$, $a_{32}$ à zéro.

Par l'opération (1) on détruira ensuite $a_{11}$, $a_{21}$; on aura alors

$$\varphi_3 = (a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2)x_2 + \mu_3 x_3,$$

$a_{12}$ et $a_{22}$ ne peuvent être nuls à la fois, car $\varphi_3$ doit contenir $x_2$. Par une opération (3) on le réduira à $\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$.

Nous obtenons ainsi le type

$$\text{(VI)} \qquad \lambda_1\mu_1 x_1 + \lambda_2\mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3^2\lambda_1$$

est formé d'une droite double $\lambda_3$ d'espèce (A) et d'une droite simple $\lambda_1$, d'espèce (G).

Soit $a_{33} = 0$, mais $a_{32} \gtrless 0$. Ce cas se ramène au précédent par l'échange des variables $x_2$, $x_3$.

**62**. Soit enfin $a_{33} = a_{32} = 0$. Comme $\varphi_3$ doit contenir $\mu_3$, $a_{31}$ sera $\gtrless 0$; et, par le changement de $\mu_3$, on pourra réduire $a_{11}$, $a_{21}$, $a_{31}$ à 0, 0, 1.

D'autre part, $\varphi_3$ contiendra $x_2$, $x_3$, respectivement multipliés par $a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2$, $a_{13}\mu_1 + a_{23}\mu_2$. Ces deux fonctions sont linéairement distinctes; car, si elles ne l'étaient pas, soit $t$ leur rapport, $x_2$ et $x_3$ ne figureraient dans $\varphi_3$ que par la combinaison $x_2 + tx_3$, et le réseau ne serait pas irréductible.

On pourra donc par une substitution linéaire opérée sur $\mu_1$, $\mu_2$ (opération 3) réduire les termes en $x_2$, $x_3$ à la forme plus simple $\mu_2 x_2 + \mu_1 x_3$.

Nous obtenons ainsi le type

(VII) $\lambda_1\mu_1x_1+\lambda_2\mu_2x_1+\lambda_3(\mu_1x_3+\mu_2x_2+\mu_3x_1).$

Ici

$$\Delta=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ 0 & \lambda_3 & 0\\ \lambda_3 & 0 & 0\end{vmatrix}=-\lambda_3^3$$

représente une droite triple, d'espèce (A).

Dans chacun des deux types (VI) et (VII) les mineurs de $\Delta$ s'annulent tous pour $\lambda_3=0$. Il existe donc dans le réseau une infinité de formes monomes.

**63.** Quatrième cas : $\Delta$ *admet en facteur une droite d'espèce* (B).

Ce cas ne diffère du précédent que par l'échange des deux systèmes de variables $\mu$ et $x$. Cet échange nous fournira deux nouveaux types :

(VIII) $\lambda_1\mu_1x_1+\lambda_2\mu_1x_2+\lambda_3(\mu_2x_2+\mu_3x_3),$

(IX) $\lambda_1\mu_1x_1+\lambda_2\mu_1x_2+\lambda_3(\mu_1x_3+\mu_2x_2+\mu_3x_1).$

Dans le premier, $\Delta$ sera formé d'une droite double d'espèce (B) et d'une droite simple d'espèce (E). Dans le dernier, $\Delta$ sera une droite triple.

Chacun de ces deux réseaux contiendra d'ailleurs une infinité de formes monomes.

**64.** Cinquième cas : $\Delta$ *est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est d'espèce* (C).

La droite $\lambda_3$ aura ici pour faisceau

$$F=\lambda_1\mu_1x_1+\lambda_2\mu_2x_2=\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2.$$

Soit

$$\varphi_3=\Sigma a_{ik}\mu_ix_k$$

la troisième forme génératrice du réseau. Pour la simplifier, nous disposons des opérations suivantes qui laissent F inaltéré :

1° Changement de $\varphi_3$ en $\varphi_3-t\varphi_1-u\varphi_2$;

2° Changement arbitraire des variables $x_3$, $\mu_3$;

3° Échange des indices 1 et 2;

4° Remplacement de $\mu_i$, $x_i$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ par $t_i\mu_i$, $u_i x_i$, $\frac{\lambda_1}{t_1 u_1}$, $\frac{\lambda_2}{t_2 u_2}$; $t_i$, $u_i$ étant des facteurs de proportionnalité arbitraires.

**65**. Supposons en premier lieu $a_{33} \gtrless 0$. On réduira $a_{33}$ à l'unité, $a_{13}$, $a_{23}$, $a_{31}$, $a_{32}$ à zéro (opération 2), puis $a_{11}$, $a_{22}$ à zéro (opération 1).

Enfin, par l'opération (4), on réduira à l'unité ceux des coefficients restants, $a_{12}$, $a_{21}$, qui ne sont pas nuls. Comme on peut d'ailleurs échanger $a_{12}$ avec $a_{21}$ (opération 3), on n'aura que trois cas à distinguer :

1° $a_{12} = a_{21} = 1$, d'où le type

$$\text{(X)} \qquad \lambda_1\mu_1 x_1 + \lambda_2\mu_2 x_2 + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_3).$$

Ici

$$\Delta = \lambda_3(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2)$$

est formé d'une droite et d'une conique qui se coupent; $\lambda_1$, $\lambda_2$ sont les tangentes en leurs points d'intersection.

Le réseau contient deux formes monomes.

2° $a_{12} = 1$, $a_{21} = 0$. On a le type

$$\text{(XI)} \qquad \lambda_1\mu_1 x_1 + \lambda_2\mu_2 x_2 + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3),$$

$$\Delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

est formé de trois droites non concourantes $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, d'espèces (E), (G), (C) respectivement.

Il y a deux formes monomes.

3° $a_{12} = a_{21} = 0$. On a le type

$$\text{(XII)} \qquad \lambda_1\mu_1 x_1 + \lambda_2\mu_2 x_2 + \lambda_3\mu_3 x_3,$$

$$\Delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Les droites $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ sont toutes les trois de l'espèce (C).

Il y a trois formes monomes.

**66.** Supposons maintenant $a_{33}=0$; $\varphi_3$ devant contenir $\mu_3$ et $x_3$, ni $a_{31}$ et $a_{32}$, ni $a_{13}$ et $a_{23}$ ne peuvent être nuls à la fois. Donc l'un au moins des quatre produits $a_{13}a_{31}$, $a_{13}a_{32}$, $a_{31}a_{23}$, $a_{32}a_{23}$ sera $\gtrless 0$; et, comme on peut permuter les indices 1 et 2, il est permis d'admettre qu'on ait

$$a_{13}a_{31} \gtrless 0 \qquad \text{ou} \qquad a_{13}a_{32} \gtrless 0,$$

d'où $a_{13} \gtrless 0$ dans tous les cas, et $a_{31}$ ou $a_{32} \gtrless 0$.

Si $a_{13}$ et $a_{31}$ sont tous deux $\gtrless 0$, on les réduira à l'unité, et $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$ à zéro (opération 2); on annulera également $a_{22}$ (opération 1). Enfin on réduira à l'unité ceux des deux coefficients restants $a_{23}$, $a_{32}$ qui ne sont pas nuls (opération 4).

On obtient ainsi quatre types, représentés par la formule

$$(\text{XIII à XVI})\quad \lambda_1\mu_1x_1+\lambda_2\mu_2x_2+\lambda_3[\mu_1x_3+a_{23}\mu_2x_3+\mu_3(x_1+a_{32}x_2)]$$

et correspondant aux quatre systèmes de valeurs $a_{23}=0, 1$, $a_{32}=0, 1$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & \lambda_3\\ 0 & \lambda_2 & a_{32}\lambda_3\\ \lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & 0\end{vmatrix}=-\lambda_3^2(\lambda_2+a_{23}a_{32}\lambda_1)$$

sera le produit de la droite double $\lambda_3$, d'espèce (C), et d'une droite simple. Celle-ci sera :

| | | |
|---|---|---|
| D'espèce (I), si.............. | $a_{23}=a_{32}=1$ | |
| » (G), si..... ........ | $a_{23}=0$, | $a_{32}=1$ |
| » (E), si.............. | $a_{23}=1$, | $a_{32}=0$ |
| » (D), si.............. | $a_{23}=a_{32}=0$ | |

Chacun de ces quatre réseaux contient deux formes monomes.

Le cas où $a_{13}a_{31}$ serait nul, mais $a_{23}a_{32} \gtrless 0$, se ramènerait au précédent par l'échange des indices 1 et 2.

**67.** Reste à discuter le cas où $a_{13}a_{31}=a_{23}a_{32}=0$. L'un au moins des produits $a_{13}a_{32}$, $a_{23}a_{31}$ sera $\gtrless 0$; et, comme on peut échanger les indices 1 et 2, il est permis de supposer $a_{13}a_{32} \gtrless 0$.

On aura dès lors $a_{31}=a_{23}=0$. On pourra réduire $a_{11}$, $a_{22}$ à zéro

par l'opération 1, $a_{12}$ également par le changement de la variable $\mu_3$. Enfin, par l'opération 4, on réduira à l'unité les coefficients $a_{13}$, $a_{32}$, et aussi le coefficient $a_{21}$, si ce dernier n'est pas nul.

Si $a_{21} = 1$, on aura obtenu le type

$$(\text{XVII}) \qquad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2),$$

où $\Delta = \lambda_3^3$ est une droite triple d'espèce (C).

Ce réseau contient deux formes monomes.

Si $a_{21} = 0$, on aura le type

$$(\text{XVIII}) \qquad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_3 x_2).$$

Ici $\Delta$ est identiquement nul.

**68.** Sixième cas : *$\Delta$ est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est de l'espèce* (D).

Le faisceau de $\lambda_3$ sera

$$F = \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1.$$

On dispose, pour simplifier l'expression de

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik} \mu_i x_k,$$

des opérations suivantes, qui laissent F inaltéré :

1° Changement de $\varphi_3$ en $\varphi_3 - t\varphi_1 - u\varphi_2$;

2° Changement arbitraire des variables $\mu_3$, $x_3$;

3° Changement de $\mu_1$, $\lambda_2$ en $\mu_1 - t\mu_2$, $\lambda_2 + t\lambda_1$;

4° Changement de $x_2$, $\lambda_2$ en $x_2 - tx_1$, $\lambda_2 + t\lambda_1$;

5° Changement de $\mu_i$, $x_k$, $\lambda_1$, $\lambda_3$ en $t_i\mu_i$, $u_k x_k$, $\frac{\lambda_1}{t_1 u_1}$, $\frac{\lambda_2}{t_2 u_1}$, les facteurs $t_i$, $u_i$ étant liés par la relation $t_1 u_1 = t_2 u_2$.

**69.** Supposons d'abord $a_{33} \gtrless 0$.

Par l'opération 2 on réduira $a_{13}$, $a_{23}$, $a_{31}$, $a_{32}$, $a_{33}$ à 0, 0, 0, 0, 1; puis on annulera $a_{11}$, $a_{21}$ par l'opération 1.

Cela posé, si $a_{12}$ n'est pas nul, on pourra le rendre égal à 1 (opération 4), puis annuler $a_{22}$ par l'opération 3. On aura ainsi le type

réduit

(XIX) $\lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3)$,

où la cubique

$$\Delta = \lambda_3(\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3)$$

est formée de la droite $\lambda_3$ et d'une conique tangente.

Si $a_{12} = 0$, mais $a_{22} \gtrless 0$, on pourra le rendre égal à l'unité, et l'on obtiendra le type

(XX) $\lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)$.

Ici la cubique

$$\Delta = \lambda_3\lambda_1(\lambda_3 + \lambda_1)$$

est formée de trois droites concourantes

$\lambda_3$, d'espèce (D),

$\lambda_1$, d'espèce (G),

$\lambda_3 + \lambda_1$, d'espèce (E).

Resterait l'hypothèse $a_{12} = a_{22} = 0$; mais elle doit être rejetée ; car le réseau contiendrait la droite $\lambda_1$, dont le faisceau, se réduisant à $\lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3 \mu_3 x_3$, serait d'espèce (C); $\lambda_3$ ne serait donc pas le facteur le plus simple de $\Delta$.

**70.** Passons au cas où $a_{33} = 0$.

Si $a_{13} \gtrless 0$, on pourra annuler $a_{23}$ (opération 3); puis rendre $a_{13}$ égal à 1, $a_{12}$ égal à 0, et $a_{11}$ égal à $a_{22}$ (opération 2); faire disparaître ensuite $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{21}$ (opération 1).

Cela posé, si $a_{32}$ n'est pas nul, on pourra le rendre égal à 1, puis annuler $a_{31}$ (opérations 2 et 4). On obtient ainsi le type

(XXI) $\lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_3 x_2)$,

où

$$\Delta = \lambda_3^2\lambda_2$$

est formé d'une droite double $\lambda_3$ d'espèce (D) et d'une droite simple $\lambda_2$ d'espèce (I).

Si $a_{32}$ est nul, $a_{31}$ ne le sera pas, car $\varphi_3$ doit contenir $\mu_3$. Par l'opération 5 on le rendra égal à 1, ce qui donne le type

$$\text{(XXII)} \quad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_3 x_1 + \mu_1 x_3).$$

Ici

$$\Delta = -\lambda_3^2 \lambda_1$$

est formé de la droite double $\lambda_3$, d'espèce (D), et de la droite simple $\lambda_1$, d'espèce (E).

**71.** Reste le cas où $a_{33} = a_{13} = 0$.

Comme $\varphi_3$ doit contenir $x_3$, $a_{23}$ ne sera pas nul.

Si l'on a également $a_{32} \gtrless 0$, on pourra annuler $a_{31}$ par l'opération 4; puis par le changement de $\mu_3$ réduire $a_{12}$ à zéro; par celui de $x_3$ réduire $a_{21}$, $a_{22}$ à 0, $a_{11}$; puis par l'opération 1 faire disparaître les termes multipliés par $a_{11}$. Enfin, par l'opération 5 on réduira à l'unité les seuls coefficients restants $a_{23}$, $a_{32}$.

On aura ainsi le type

$$\text{(XXIII)} \quad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_2 x_3 + \mu_3 x_2).$$

$$\Delta = -\lambda_3^2 \lambda_1$$

représentera ici une droite double, d'espèce (D), et une droite simple, d'espèce (G).

Enfin, si $a_{32}$ est nul, $a_{31}$ ne le sera pas, car $\varphi_3$ doit contenir $\mu_3$. Par le changement de $\mu_3$ et de $x_3$ on pourra annuler $a_{11}$, $a_{21}$, $a_{22}$. Par l'opération 5 on rendra $a_{23}$, $a_{31}$ égaux à 1, ainsi que $a_{12}$, si ce dernier coefficient n'est pas nul.

On aura, pour $a_{12} = 1$, le type

$$\text{(XXIV)} \quad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1).$$

Ici

$$\Delta = \lambda_3^3$$

représente une droite triple, d'espèce D.

Enfin, pour $a_{12} = 0$, on a le type

$$(\text{XXV}) \qquad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_2 x_3 + \mu_3 x_1),$$

où $\Delta$ est identiquement nul.

**72.** *Remarque.* — On vérifie aisément que, pour les réseaux (XIX) à (XXV) que fournit l'étude du sixième cas, les mineurs de $\Delta$ ne peuvent s'annuler à la fois que pour $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Ils ne contiennent donc qu'une forme monome. Ce caractère invariant les sépare des réseaux (VI) à (XVIII), qui en contiennent au moins deux.

**73.** Septième cas : $\Delta$ *est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est de l'espèce* (E). — On a ici

$$F = \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2).$$

On peut simplifier $\varphi_3$ par les opérations suivantes, qui n'altèrent pas F :

1° Changement de $\varphi_3$ en $\varphi_3 - t\varphi_1 - u\varphi_2$;

2° Changement de la variable $x_3$;

3° Changement de $\mu_2$, $x_2$ en $\mu_2 - t\mu_3$, $x_2 + tx_1$;

4° Changement de $\mu_2$, $\lambda_1$ en $\mu_2 - t\mu_1$, $\lambda_1 + t\lambda_2$;

5° Changement de $\mu_i$, $x_i$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ en $t_i\mu_i$, $u_i x_i$, $\frac{\lambda_1}{t_1 u_1}$, $\frac{\lambda_2}{t_2 u_1}$,

les $t$, $u$ étant liés par la seule relation $t_2 u_1 = t_3 u_2$.

Soit

$$\varphi_3 = \sum a_{ik}\mu_i x_k.$$

Toutes les opérations précédentes laissent le coefficient $a_{23}$ invariable ou le multiplient par un facteur arbitraire autre que zéro. Nous aurons donc à discuter les deux hypothèses distinctes

$$a_{23} = 1, \qquad a_{23} = 0.$$

**74.** *Première hypothèse :* $a_{23} = 1$. — On pourra annuler $a_{33}$ et $a_{13}$ (opérations 3 et 4); puis annuler $a_{22}$ et rendre $a_{21}$ égal à $a_{32}$ (opéra-

tion 2); cela fait, l'opération 1 pourra faire disparaître $a_{11}$, $a_{21}$, $a_{32}$; enfin, par l'opération 5 on rendra égaux à 1 ceux des coefficients restants $a_{12}$, $a_{31}$ qui ne sont pas nuls.

Ils ne peuvent être nuls à la fois; car, $\varphi_3$ se réduisant à $\mu_2 x_3$, $\Delta$ contiendrait en facteur la droite $\lambda_2$, dont le faisceau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_3 \mu_2 x_3$$

est de l'espèce D; elle serait donc plus simple que $\lambda_3$.

Restent les trois solutions

$$a_{12} = a_{31} = 1; \qquad a_{12} = 0, a_{31} = 1; \qquad a_{12} = 1, a_{31} = 0.$$

La première donne le réseau

$$\text{(XXVI)} \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1),$$

où

$$\Delta = \lambda_3 (\lambda_3^2 - \lambda_1 \lambda_2)$$

représente une droite et une conique qui se coupent.

La deuxième, le réseau

$$\text{(XXVII)} \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_2 x_3 + \mu_3 x_1).$$

$$\Delta = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

y représente trois droites non concourantes $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, respectivement d'espèces (H), (E), (E).

La dernière, le réseau

$$\text{(XXVIII)} \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3).$$

Ici encore

$$\Delta = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

sera le produit de trois droites non concourantes; mais elles seront des espèces (I), (G), (E).

**75.** *Deuxième hypothèse :* $a_{23} = 0$. — I. Supposons d'abord

$$a_{13} \gtrless 0, \qquad a_{33} \gtrless 0.$$

On annulera $a_{31}$ et l'on rendra $a_{32}$ égal à $a_{21}$ par le changement de la variable $x_3$; puis par l'opération 1 on fera disparaître $a_{11}$, $a_{21}$, $a_{32}$.

1° Si maintenant $a_{22} \gtrless 0$, on fera disparaître $a_{12}$ par l'opération 4; enfin l'on rendra $a_{13}$, $a_{33}$, $a_{22}$ égaux à 1 (opération 5). Et l'on aura le type réduit

$$\text{(XXIX)} \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3),$$

où

$$\Delta = \lambda_3 (\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2)$$

représente une droite et une conique tangentes.

2° Si $a_{22}$ est nul, $a_{12}$ ne pourra l'être; car la droite $\lambda_2$ aurait pour faisceau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_3 (a_{13} \mu_1 x_3 + a_{33} \mu_3 x_3)$$

qui est évidemment réductible à l'espèce (C). Ce serait donc un diviseur de $\Delta$, plus simple que $\lambda_3$.

Cela posé, on pourra réduire $a_{13}$, $a_{33}$, $a_{12}$ à l'unité, ce qui donne le type

$$\text{(XXX)} \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 (\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 (\mu_1 x_2 + \mu_1 x_3 + \mu_3 x_3),$$

où

$$\Delta = \lambda_3 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_3)$$

représente trois droites concourantes, d'espèces (E), (G), (E).

(En effet, considérons la droite $\lambda_2 - \lambda_3$ par exemple. Son faisceau sera

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 | \mu_2 x_1 + (\mu_1 + \mu_3)(x_2 + x_3) |$$

et se ramène immédiatement à E en changeant $\mu_3$, $x_2$ en $\mu_3 - \mu_1$, $x_2 - x_3$).

**76.** II. Supposons en second lieu $a_{13} \gtrless 0$, $a_{33} = 0$. On pourra, en changeant la variable $x_3$, réduire $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$ à 0, 0, 1.

1° Cela posé, si $a_{22} \gtrless 0$, on rendra $a_{21}$ égal à $a_{32}$ (opération 3); puis on fera disparaître ces coefficients (opération 1). Enfin, par l'opération 5, on réduira à l'unité $a_{22}$, et aussi $a_{31}$, si ce dernier coefficient n'est pas nul.

Si $a_{31} = 1$, on aura le type

$$\text{(XXXI)} \qquad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1).$$

$\Delta = \lambda_3(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)$ représente encore trois droites concourantes.

La première est de l'espèce (E) et les deux autres de l'espèce (G).

Considérons, en effet, l'une des deux autres, $\lambda_2 \pm \lambda_3$. Son faisceau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 [\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 \mp (\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1)]$$

dépend seulement des cinq variables

$$\mu_1, \quad \mu_2 \mp \mu_3, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3.$$

D'ailleurs, il contient une forme monome $\mu_1 x_1$. Il est donc de l'espèce (G).

Si $a_{31} = 0$, on a le type

$$\text{(XXXII)} \qquad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2).$$

$\Delta = \lambda_2^2 \lambda_3$ est le produit de la droite simple $\lambda_3$ d'espèce (E) par la droite double $\lambda_2$. Celle-ci est d'espèce (G), car son faisceau dépend des cinq variables $\mu_1$, $\mu_2$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ et contient la forme monome $\mu_1 x_1$.

2° Si $a_{22}$ est nul ($a_{13}$, $a_{12}$, $a_{11}$, $a_{23}$, $a_{33}$ étant déjà réduits à 1, 0, 0, 0, 0), on pourra, par l'opération 1, annuler $a_{21}$; puis, si $a_{32}$ n'est pas nul, annuler $a_{31}$ (opération 3); enfin, réduire $a_{32}$ à l'unité (opération 5). On aurait alors le réseau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_3 x_2)$$

où

$$\Delta = \lambda_3 \lambda_2(\lambda_3 + \lambda_2).$$

Mais ce cas est à rejeter, car la droite $\lambda_3 + \lambda_2$, dont le faisceau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 - \mu_1 x_3)$$

ne dépend que de quatre variables, serait plus simple que la droite $\lambda_3$.

S $a_{32}$ était nul, $\varphi_3$ se réduisant à $\mu_1 x_3 + a_{31}\mu_3 x_1$, le faisceau de $\lambda_2$

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_3(\mu_1 x_3 + a_{31}\mu_3 x_1)$$

ne dépendant que de quatre variables au plus, $\Delta$ admettrait un facteur linéaire $\lambda_2$ plus simple que $\lambda_3$. Ce cas est donc encore à rejeter.

**77.** III. Supposons, enfin, $a_{13} = 0$ (avec $a_{23} = 0$). La forme $\varphi_3$ devant contenir $x_3$, $a_{33}$ sera $\gtrless 0$. En changeant la variable $x_3$, on pourra le ramener à l'unité, annuler $a_{31}$ et rendre $a_{32}$ égal à $a_{21}$; puis, par l'opération 1, faire disparaître $a_{11}$, $a_{21}$, $a_{32}$; $\varphi_3$ sera ainsi ramené à la forme

$$a_{12}\mu_1 x_2 + a_{22}\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3.$$

Les coefficients $a_{12}$, $a_{22}$ ne peuvent être nuls tous deux; car la droite $\lambda_2$, dont le faisceau se réduirait à

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_3 \mu_3 x_3$$

et ne contiendrait que quatre variables, serait un facteur de $\Delta$ plus simple que $\lambda_3$.

D'autre part, si $a_{22} \gtrless 0$, l'opération 4 permet d'annuler $a_{12}$. Donc, un seul des deux coefficients $a_{12}$, $a_{22}$ différera de zéro. L'opération 5 permettra de le rendre égal à l'unité. Faisant donc successivement $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$ et $a_{12} = 1$, $a_{22} = 0$, nous obtiendrons les deux types

(XXXIII) $\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)$,

(XXXIV) $\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3)$.

Dans le premier, $\Delta = -\lambda_1\lambda_3^2$. Le facteur double $\lambda_3$ est de l'espèce (E) et le facteur simple $\lambda_1$ de l'espèce (H).

Dans le second, $\Delta = -\lambda_2\lambda_3^2$; $\lambda_3$ sera encore de l'espèce (E); mais le facteur simple $\lambda_2$ sera de l'espèce (G).

**78.** Huitième cas : $\Delta$ *est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est de l'espèce* (F). — Le faisceau F de $\lambda_3$ est ici de la forme

$$\lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2).$$

Il reste inaltéré par les opérations suivantes, dont on pourra se servir pour simplifier l'expression de $\varphi_3$ :

1° Changement de $\varphi_3$ en $\varphi_3 - t\varphi_1 - u\varphi_2$;

2° Changement de la variable $x_3$;

3° Échange de $\lambda_1$, $\mu_1$, $x_1$ et de $\lambda_2$, $\mu_3$, $x_2$;

4° Changement de $\lambda_1$, $\mu_2$, $x_1$, $\mu_3$ en $\lambda_1 + t\lambda_2$, $\mu_2 - t\mu_1$, $x_1 + tx_2$, $\mu_3 - 2t\mu_2 + t^2\mu_1$;

5° Changement de $\mu_i$, $x_i$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ en $t_i\mu_i$, $u_i x_i$, $\frac{\lambda_1}{t_1 u_1}$, $\frac{\lambda_2}{t_2 u_1}$, les facteurs $t_i$, $u_i$ étant liés par les relations

$$t_1 u_1 = t_2 u_2, \qquad t_2 u_1 = t_3 u_2.$$

Les opérations 3 et 4, combinées entre elles, permettent d'effectuer sur $\lambda_1$, $\lambda_2$ une substitution linéaire quelconque (à condition d'en détruire l'effet par des substitutions correspondantes effectuées sur les variables $\mu$ et $x$). Cela revient à déplacer à volonté sur la droite $\lambda_3$ les sommets $(\lambda_1\lambda_3)$ et $(\lambda_2\lambda_3)$ du triangle de référence. Au lieu d'exécuter sur $\varphi_3$ ces substitutions assez complexes, il sera préférable de se donner *a priori* autant que possible la position de ces deux sommets, et de voir, d'après leur situation relativement à la cubique $\Delta$, les conditions qui en résultent pour la fonction

$$\varphi_3 = \sum a_{ik}\mu_i x_k.$$

On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{21}\lambda_3 + \lambda_2 & a_{31}\lambda_3 \\ a_{12}\lambda_3 & a_{22}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{32}\lambda_3 + \lambda_2 \\ a_{13}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3(a_{33}\lambda_1^2 + a_{23}\lambda_1\lambda_2 + a_{13}\lambda_2^2 + \ldots).$$

Le facteur entre parenthèses représente une conique qui peut être décomposable, mais n'est pas identiquement nulle, et ne contient pas $\lambda_3$ en facteur; car, $x_3$ devant figurer dans $\varphi_3$, $a_{13}$, $a_{23}$, $a_{33}$ ne sont pas tous nuls.

Cette conique rencontre $\lambda_3$ en deux points : s'ils sont séparés, on les choisira comme sommets du triangle de référence; on aura, dans ce cas, $a_{13} = a_{33} = 0$, et l'on pourra supposer $a_{23} = 1$.

S'ils se réunissent en un seul, on le prendra pour le sommet $(\lambda_1 \lambda_3)$, laissant l'autre sommet indéterminé provisoirement. On aura, dans ce cas, $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = 1$.

Discutons successivement ces deux hypothèses.

**79.** *Première hypothèse :* $a_{13} = a_{33} = 0$, $a_{23} = 1$. — Par le changement de $x_3$, on rendra $a_{22}$ et $a_{21}$ respectivement égaux à $a_{11}$, $a_{32}$; puis, par le changement de $\varphi_3$, on fera disparaître ces quatre coefficients. Enfin, par l'opération 5, on rendra $a_{31}$, $a_{12}$ égaux à 0 ou à 1.

Pour $a_{31} = a_{12} = 1$, on aura le type

$$\text{(XXXV)} \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) \\ \qquad\qquad + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1). \end{cases}$$

$$\Delta = \lambda_3(\lambda_3^2 - \lambda_1 \lambda_2)$$

représentera une droite et une conique qui se coupent.

Pour $a_{31} = 0$, $a_{12} = 1$, on aura le réseau

$$\text{(XXXVI)} \quad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3).$$

$$\Delta = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

représentera trois droites non concourantes, d'espèces (I), (H), (F) respectivement.

Le cas où $a_{31} = 1$, $a_{12} = 0$ se ramène au précédent par l'opération 3.

Enfin, pour $a_{31} = a_{12} = 0$, on aura le type

$$\text{(XXXVII)} \quad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 \mu_2 x_3,$$

où

$$\Delta = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

représente trois droites non concourantes et d'espèces (G), (G), (F).

**80.** *Deuxième hypothèse :* $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = 1$. — Par le changement de $x_3$, on annulera $a_{31}$ et l'on rendra $a_{32}$ égal à $a_{21}$; puis, par le changement de $\varphi_3$, on fera disparaître $a_{11}$, $a_{21}$, $a_{32}$.

Si maintenant $a_{22}$ n'est pas nul, on fera disparaître $a_{12}$ par l'opération 4; enfin, on rendra $a_{22}$ égal à 1 par l'opération 5, et l'on aura ainsi le réseau

$$(\text{XXXVIII}) \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) \\ \qquad + \lambda_3(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3), \end{cases}$$

où

$$\Delta = \lambda_3 \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_3)$$

représente trois droites concourantes, d'espèces (F), (H), (I) respectivement.

Si $a_{22} = 0$, mais $a_{12} \gtrless 0$, on pourra le rendre égal à 1 par l'opération 5, et l'on aura

$$(\text{XXXIX}) \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) \\ \qquad + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3). \end{cases}$$

$$\Delta = \lambda_3(\lambda_1^2 - \lambda_2 \lambda_3)$$

représente une droite et une conique tangentes entre elles.

Enfin, si $a_{21} = a_{22} = 0$, on aura le type

$$(\text{XL}) \qquad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 \mu_3 x_3.$$

$$\Delta = \lambda_1^2 \lambda_3.$$

La droite double $\lambda_1$ est d'espèce (G); $\lambda_3$ est d'espèce (F).

**81.** Neuvième cas : *$\Delta$ est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est de l'espèce* (G) *ou de l'espèce* (H). — Les faisceaux G, H ne diffèrent des faisceaux E, F que par l'échange des deux systèmes de variables $\mu$ et $x$. Les types cherchés se déduiront donc immédiatement des types XXVI à XL par cette même opération.

On doit toutefois rejeter, parmi les nouveaux types obtenus, tous ceux où $\Delta$ contiendrait un facteur linéaire de l'une des espèces (E), (F) plus simples que (G) et (H). Ce sont ceux que l'on pourrait déduire de ceux des types XXVI à XL où $\Delta$ contient un facteur de l'une des espèces (G), (H).

Il ne restera ainsi que quatre types nouveaux, déduits respectivement des types XXVI, XXIX, XXXV, XXXIX. Ce sont les suivants :

$$\text{(XLI)} \qquad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3) + \lambda_3(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \mu_1 x_3),$$

$$\text{(XLII)} \qquad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3) + \lambda_3(\mu_3 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3),$$

$$\text{(XLIII)} \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3) \\ \qquad + \lambda_3(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \mu_1 x_3), \end{cases}$$

$$\text{(XLIV)} \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3) \\ \qquad + \lambda_3(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_3). \end{cases}$$

La cubique $\Delta$ s'y décompose en une droite $\lambda_3$ et une conique.

La droite $\lambda_3$ est de l'espèce (G) dans les types XLI et XLII; de l'espèce (H) dans les deux autres.

Elle coupe la conique en deux points distincts dans les types XLI et XLIII; elle la touche dans les deux autres.

**82.** Dixième cas : $\Delta$ *est décomposable; mais tous ses facteurs linéaires sont de l'espèce* (I). — Soit $\lambda_3$ l'un de ces facteurs; son faisceau sera réductible à la forme

$$F = \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_3).$$

Mais la discussion sera plus claire si, en changeant $x_1, x_2, x_3$ en $-x_3$, $x_1$, $x_2$, nous lui donnons la forme équivalente

$$F = \lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3).$$

Cette expression reste inaltérée :

1° Si l'on opère une même substitution linéaire sur les deux systèmes de variables $\mu_1$, $\mu_2$ et $x_1$, $x_2$, et sur $\lambda_1$, $\lambda_2$ la substitution inverse de celle-là;

2° Si l'on change $\mu_1$, $\mu_2$, $x_1$, $x_2$ en $\mu_1 + t\mu_3$, $\mu_2 + u\mu_3$, $x_1 + tx_3$, $x_2 + ux_3$.

Cela posé, considérons la fonction $\varphi_3$. Elle peut se mettre sous la forme

$$\varphi_3 = \mathcal{S} + \mathcal{A},$$

$\mathcal{S}$ étant symétrique et $\mathcal{A}$ alternée par rapport aux deux systèmes de variables $\mu$ et $x$.

$\mathcal{S}$ sera la polaire par rapport aux $\mu$ d'une forme Q quadratique en $x_1$, $x_2$, $x_3$.

Les substitutions 1 et 2 permettent, comme l'on sait, de réduire 2Q à l'une des huit expressions suivantes :

$$2x_1x_2 + x_3^2, \quad 2x_1x_2, \quad x_2^2 + 2x_1x_3, \quad x_2^2 + x_3^2,$$
$$x_2^2, \quad 2x_2x_3, \quad x_3^2, \quad 0;$$

dont les polaires, divisées par 2, seront les expressions réduites de $\mathcal{S}$.

Quant à $\mathcal{A}$, elle sera de la forme

$$a(\mu_1x_2 - \mu_2x_1) + b(\mu_3x_1 - \mu_1x_3) + c(\mu_3x_2 - \mu_2x_3)$$

et le changement de $\varphi_3$ en $\varphi_3 - b\varphi_1 - c\varphi_2$ la réduira à son premier terme

$$a(\mu_1x_2 - \mu_2x_1).$$

Soient respectivement $\mathcal{S}'$, $\mathcal{A}'$ l'ensemble des termes de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{A}$ qui contiennent les produits de $\mu_1$, $\mu_2$ par $x_1$, $x_2$; si le déterminant de $\mathcal{S}'$ n'est pas nul, $a^2$ représentera le rapport des déterminants de $\mathcal{A}'$ et de $\mathcal{S}'$. C'est donc un invariant du réseau. On pourra seulement changer le signe de $a$ en permutant les indices 1 et 2.

Dans tous les autres cas, en multipliant les variables $\lambda$, $\mu$, $x$ par des facteurs de proportionnalité convenables, on pourra réduire $a$ à l'unité, s'il n'est pas nul. Si, par exemple,

$$2Q = x_2^2 + 2x_1x_3,$$

d'où

$$\mathcal{S} = \mu_2x_2 + \mu_1x_3 + \mu_3x_1;$$

il suffira de changer $\mu_2$, $\mu_3$, $x_2$, $x_3$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ en $a\mu_2$, $a^2\mu_3$, $ax_2$, $a^2x_3$, $\frac{\lambda_1}{a^2}$, $\frac{\lambda_2}{a^3}$, $\frac{\lambda_3}{a^2}$. Si 2Q ne contient pas $x_1$ on changera $\mu_1$, $x_1$, $\lambda_1$ en $\frac{\mu_1}{a}$, $\frac{x_1}{a}$, $a\lambda_1$.

**83.** Discutons les solutions trouvées ci-dessus :

Soit $2Q = 2x_1x_2 + x_3^2$ : on obtiendra le type

$$(\text{XLV})\quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) \\ \quad + \lambda_3[(1+a)\mu_1 x_2 + (1-a)\mu_2 x_1 + \mu_3 x_3]. \end{cases}$$

$$\Delta = \lambda_3[(a^2-1) - 2\lambda_1\lambda_2]$$

se composera en général d'une droite $\lambda_3$, d'espèce (I) et d'une conique qui la coupe.

Si $a = \pm 1$ (ces deux cas se ramènent l'un à l'autre), $\Delta$ dégénère dans le produit de trois droites non concourantes $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$. La droite $\lambda_3$ est d'espèce (I), les deux autres d'espèces (F) et (H). Le réseau (XLV) doit donc, pour cette valeur de $a^2$, pouvoir se transformer dans le réseau (XXXVI) qui est le seul, parmi ceux précédemment trouvés, où $\Delta$ se décompose en trois droites non concourantes des espèces précitées.

Effectivement, soit, pour fixer les idées, $a = +1$. Le réseau XLV deviendra

$$\lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) + \lambda_3(2\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3),$$

expression qui se transforme en XXXVI, si l'on change

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,\quad \mu_1,\quad \mu_2,\quad \mu_3,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3$$

en

$$-\lambda_3,\quad 2\lambda_2,\quad \lambda_1,\quad \mu_1,\quad -\tfrac{1}{2}\mu_3,\quad \mu_2,\quad -x_3,\quad \tfrac{1}{2}x_1,\quad x_2.$$

Il faudra donc, pour éviter un double emploi, soit introduire la condition $a^2 \gtrless 1$ dans la définition du type XLV, soit supprimer cette condition, mais en rayant du Tableau le type XXXVI, qui ne serait plus qu'un cas particulier de XLV.

**84.** Soit $2Q = 2x_1x_2$. On aura le réseau

$$(\text{XLVI})\quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) \\ \quad + \lambda_3[(1+a)\mu_1 x_2 + (1-a)\mu_2 x_1]. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & (1-a)\lambda_3 & \lambda_1 \\ (1+a)\lambda_3 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = -2\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

représentera trois droites non concourantes. Leurs faisceaux dépendant en général de toutes les variables seront de l'espèce (I).

Il y aura toutefois dégénérescence si $a^2 = 1$. Soit, pour fixer les idées, $a = +1$. Le réseau deviendra

$$\lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) + \lambda_3 . 2\mu_1 x_2.$$

Le faisceau de $\lambda_1$, ne dépendant que des cinq variables $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $x_2$, $x_3$, et contenant une forme monome $2\mu_1 x_2$, sera de l'espèce (E).

Celui de $\lambda_2$, ne dépendant que de $\mu_1$, $\mu_3$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ et contenant cette même forme monome, sera de l'espèce (G). Celui de $\lambda_3$ sera toujours de l'espèce (I).

Le réseau particulier que nous considérons doit donc être équivalent au type XXVIII qui, seul parmi les précédents, jouit des propriétés ci-dessus. Effectivement, si nous remplaçons

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

par

$$\lambda_3, \quad \lambda_2, \quad \tfrac{1}{2}\lambda_1, \quad \mu_1, \quad \mu_3, \quad \mu_2, \quad x_3, \quad x_1, \quad -x_2$$

l'expression précédente se transforme dans l'expression XXVIII.

Il faudra donc introduire encore la condition $a^2 \gtrless 1$ dans la définition du type XLVI, ou, si l'on veut supprimer cette restriction, rayer du Tableau le type XXVIII, qui ne serait plus qu'un cas particulier de XLVI.

**85.** Revenons au cas général, où $a^2 \gtrless 1$. La cubique $\Delta$ se décomposant en trois droites de même espèce, on pourra choisir arbitrairement parmi elles celle que l'on prendra pour $\lambda_3$.

Dans quelle mesure la valeur de l'invariant dépend-elle de ce choix ?

1° Nous avons vu que l'expression XLVI ne change pas si l'on permute les indices 1 et 2, en changeant le signe de $a$. Cet invariant ne fait donc que changer de signe si l'on permute les droites $\lambda_1$, $\lambda_2$.

2° Permutons maintenant $\lambda_2$ et $\lambda_3$. Le réseau deviendra

$$\lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2[(1+a)\mu_1 x_2 + (1-a)\mu_2 x_1] \\ + \lambda_3(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3).$$

Changeons

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \lambda_3$$

en

$$\mu_3,\quad \frac{\mu_2}{a-1},\quad -\mu_1,\quad x_3,\quad \frac{x_2}{a+1},\quad -x_1,\quad (a^2-1)\lambda_3.$$

Cette expression sera changée en

$$\lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) + \lambda_3[(1-a)\mu_1 x_2 + (1+a)\mu_2 x_1]$$

et l'on voit que l'invariant, ici encore, a simplement changé de signe.

**86.** Soit

$$2Q = x_2^2 + 2x_1 x_3;$$

on aura

$$\varphi_3 = \mu_2 x_2 + \mu_1 x_3 + \mu_3 x_1 + a(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1),$$

$a$ étant égal à 1 ou à 0.

L'hypothèse $a = 0$ doit être rejetée, car la droite $\lambda_1 - \lambda_3$, ayant pour faisceau

$$\lambda_2\varphi_2 + \lambda_1(\varphi_1 + \varphi_3) = \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) + \lambda_1(\mu_2 x_2 + 2\mu_3 x_1)$$

qui ne contient pas la variable $\mu_1$, serait un facteur de $\Delta$, d'espèce plus simple que (I).

Posons donc $a = 1$; nous aurons le type

$$(\text{XLVII})\quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) \\ \quad + \lambda_3[\mu_1(x_2 + x_3) + \mu_2(x_2 - x_1) + \mu_3 x_1]. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_3 + \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 - \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_3(\lambda_1^2 - \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3)$$

représente une droite et une conique tangentes entre elles.

**87.** Dans les cas qui nous restent à examiner, Q ne contient plus la variable $x_1$, et $a$ doit être supposé égal à 0 ou à 1. Mais l'hypothèse $a = 0$ doit être rejetée.

En effet, les variables $\mu_1$, $x_1$ ne figureraient pas dans la fonction $\varphi_3$, non plus que dans la fonction $\varphi_2 = \mu_3 x_2 - \mu_2 x_3$. Le faisceau de la

droite $\lambda_1$ contenant au plus quatre variables, cette droite serait un facteur de $\Delta$, d'espèce plus simple que (I).

**88.** Soit $2Q = x_2^2 + x_3^2$, et $a = 1$. Nous aurons le type

$$(\text{XLVIII}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) \\ &\qquad + \lambda_3(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \mu_1 x_2 - \mu_2 x_1). \end{aligned} \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3(\lambda_3^2 + \lambda_1^2)$$

représente trois droites concourantes. Toutes trois sont de l'espèce (I).

**89.** Soit $2Q = x_2^2$, $a = 1$. Nous aurons le type

$$(\text{XLIX}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) \\ &\qquad + \lambda_3(\mu_2 x_2 + \mu_1 x_2 - \mu_2 x_1). \end{aligned} \right.$$

$$\Delta = \lambda_3 \lambda_1^2$$

se décompose en une droite double et une droite simple, toutes deux d'espèce (I).

**90.** Soit $2Q = x_2 x_3$, $a = 1$. Nous aurons le réseau

$$\begin{aligned} &\lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) \\ &\qquad + \lambda_3(\mu_2 x_3 + \mu_3 x_2 + \mu_2 x_1 - \mu_1 x_2). \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_3 + \lambda_2 \\ -\lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda_1 \lambda_3^2$$

est encore le produit d'une droite double par une droite simple, toutes deux d'espèce (I).

Mais un réseau de ce genre est susceptible de deux formes réduites distinctes suivant qu'on prend pour $\lambda_3$ la droite simple, comme au numéro précédent, ou la droite double, comme ici. Une de ces expressions doit être rejetée, si l'on veut éviter un double emploi. Nous pouvons donc laisser de côté ce dernier type.

**91.** Soit $2Q = x_3^2$, $a = 1$. Nous aurons le type

$$(\mathrm{L}) \quad \lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) + \lambda_3(\mu_3 x_3 + \mu_1 x_2 - \mu_2 x_1).$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3^3$$

représentera une droite triple.

**92.** Soit enfin $Q = 0$, $a = 1$. On obtiendra un dernier type

$$(\mathrm{LI}) \quad \lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) + \lambda_3(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1),$$

qui, par le changement de $\lambda_1$, $\lambda_2$ en $\lambda_2$, $-\lambda_1$, pourra s'écrire sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & x_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & x_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & x_3 \end{vmatrix}$$

$\Delta$ sera identiquement nul et contiendra toutes les droites du plan. Mais elles seront toutes de l'espèce (I). Car, si l'une d'elles était d'une espèce plus simple, le réseau actuel devrait être équivalent à l'un des types précédemment trouvés pour lesquels $\Delta$ est nul. Ce sont les types XVIII et XXV.

Mais le réseau XVIII contient deux formes monomes, le réseau XXV une seule, le réseau LI aucune. Ces trois types sont donc nettement distincts.

**93.** Nous donnons ci-après comme résumé le Tableau des 51 types que nous avons formés et des caractères invariants qui les distinguent.

La colonne intitulée : *Facteurs de* $\Delta$ demande quelques explications. Le symbole $\Delta$ représente une cubique indécomposable : Q désigne une conique indécomposable; A, B, ..., I des facteurs linéaires correspondant à des droites d'espèce A, B, ..., I.

Ainsi $A^2G$, mis dans cette colonne, signifie que $\Delta$ se décompose en une droite double d'espèce A et une droite simple d'espèce G; III que $\Delta$ est formé de trois droites distinctes d'espèce I; etc.

| NUMÉROS des types | FORMES GÉNÉRATRICES $\varphi_1$. | $\varphi_2$ | $\varphi_3$. | FACTEURS de $\Delta$. | PROPRIÉTÉS INVARIANTES de ces facteurs. | NOMBRE des formes monomes. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I.......... | $\mu_1 x_1 - \mu_3 x_3$ | $\mu_3 x_3 - \mu_2 x_2$ | $\mu_1(x_2 + \rho x_3) + \mu_2(\rho x_1 + x_3) + \mu_3(x_1 + \rho x_2 + \sigma x_3)$, $(\rho^3 - \rho\sigma + 1 \gtrless 0)$ (1) | $\Delta$ | Cubique générale (un point double si $27(\rho^3 - \rho\sigma + 1) + \sigma^2 = 0$) | 0 en général, 1 si $\rho^3 = 1$, $\sigma = -3\rho$ |
| II ....... | $\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1$ | $\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$ | $\mu_1(x_2 + x_3) + \mu_2(x_1 + x_3) + \mu_3(-x_1 + x_2)$ | $\Delta$ | Cubique à rebroussement | 0 |
| III ....... | Id. | Id. | $\mu_1(x_2 + x_3) + \mu_2 x_1 - \mu_3 x_1$ | $\Delta$ | Id. | 0 |
| IV........ | Id. | $\mu_3 x_3$ | $\mu_1 x_3 + \mu_2(x_2 + x_3) + \mu_3(x_1 + x_2)$ | $\Delta$ | Id. | 1 |
| V......... | Id. | Id. | $\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1$ | $\Delta$ | Id. | 1 |
| VI ....... | $\mu_1 x_1$ | $\mu_2 x_1$ | $\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$ | $A^2G$ | | $\infty$ |
| VII ...... | Id. | Id. | $\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1$ | $A^3$ | | $\infty$ |
| VIII...... | Id. | $\mu_1 x_2$ | $\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$ | $B^2E$ | | $\infty$ |
| IX ...... | Id. | Id. | $\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1$ | $B^3$ | | $\infty$ |
| X ........ | Id. | $\mu_2 x_2$ | $\mu_1 x_2 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_3$ | CQ | | 2 |
| XI.. ..... | Id. | Id. | $\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3$ | CEG | | 2 |
| XII....... | Id. | Id. | $\mu_3 x_3$ | CCC | | 3 |
| XIII...... | Id. | Id. | $\mu_1 x_3 + \mu_2 x_3 + \mu_3(x_1 + x_2)$ | $C^2I$ | | 2 |
| XIV.. .. | Id. | Id. | $\mu_1 x_3 + \mu_3(x_1 + x_2)$ | $C^2G$ | | 2 |
| XV... .. | Id. | Id. | $\mu_1 x_3 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1$ | $C^3D$ | | 2 |
| XVI...... | Id. | Id. | $\mu_1 x_3 + \mu_3 x_1$ | $C^2E$ | | 2 |
| XVII..... | $\mu_1 x_1$ | $\mu_2 x_2$ | $\mu_1 x_3 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2$ | $C^3$ | | 2 |
| XVIII .... | Id. | Id. | $\mu_1 x_3 + \mu_3 x_2$ | $\Delta = 0$ | | 2 |
| XIX...... | $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$ | $\mu_2 x_1$ | $\mu_1 x_2 + \mu_1 x_3$ | DQ | Tangentes. | 1 |
| XX....... | Id. | Id. | $\mu_2 x_2 + \mu_3 x_1$ | DEG | Concourantes. | 1 |
| XXI...... | Id. | Id. | $\mu_1 x_3 + \mu_3 x_2$ | $D^2I$ | | 1 |
| XXII ..... | Id. | Id. | $\mu_3 x_1 + \mu_1 x_3$ | $D^2E$ | | 1 |
| XXIII ... | Id. | Id. | $\mu_2 x_3 + \mu_3 x_2$ | $D^2G$ | | 1 |
| XXIV..... | Id. | Id | $\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1$ | $D^3$ | | 1 |

(1) *Observations.* — Si $\rho^3 - \rho\sigma + 1$ était nul, ce réseau serait équivalent à **XLVI** (ou à **XLVIII** si l'on avait aussi $\sigma = 0$).

(2) $\Delta'$ est une cubique à un point double pour le type **II**; elle se décompose en une droite et une conique pour le type **IV**; en trois droites pour les types **III** et V

| NUMÉROS des types. | FORMES GÉNÉRATRICES $\varphi_1$. | $\varphi_2$. | $\varphi_3$. | FACTEURS de $\Delta$. | PROPRIÉTÉS INVARIANTES de ces facteurs. | NOMBRE des formes monomes. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| XXV ..... | $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$ | $\mu_2 x_1$ | $\mu_2 x_3 + \mu_3 x_1$ | $\Delta = 0$ | | 1 |
| XXVI..... | $\mu_1 x_1$ | $\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2$ | $\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1$ | EQ | | 1 |
| XXVII.... | Id. | Id. | $\mu_2 x_3 + \mu_3 x_1$ | EEH | | 1 |
| XXVIII.. | Id. | Id. | $\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3$ | EGI | | 1 |
| XXIX.... | Id. | Id. | $\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1$ | EQ | Tangentes. | 1 |
| XXX ..... | Id. | Id. | $\mu_1 (x_2 + x_3) + \mu_3 x_1$ | EEG | Concourantes. | 1 |
| XXXI .. | Id. | Id. | $\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1$ | EGG | Concourantes. | 1 |
| XXXII.... | Id. | Id. | $\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2$ | $EG^2$ | | 1 |
| XXXIII... | Id. | Id. | $\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$ | $E^2H$ | | 1 |
| XXXIV ... | Id. | Id. | $\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3$ | $E^2G$ | | 1 |
| XXXV .... | $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$ | $\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2$ | $\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1$ | FQ | | 1 |
| XXXVI .. | Id. | Id. | $\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3$ | FHI | | 0 |
| XXXVII .. | Id. | Id. | $\mu_2 x_3$ | FGG | | 1 |
| XXXVIII . | Id. | Id. | $\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$ | FHI | Concourantes. | 0 |
| XXXIX ... | Id. | Id. | $\mu_1 x_2 + \mu_3 x_1$ | FQ | Tangentes. | 0 |
| XL...... | Id. | Id. | $\mu_3 x_3$ | $FG^2$ | | 1 |
| XLI...... | $\mu_1 x_1$ | $\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3$ | $\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \mu_1 x_3$ | GQ | | 1 |
| XLII..... | Id. | Id. | $\mu_3 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$ | GQ | Tangentes. | 1 |
| XLIII .. . | $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$ | Id. | $\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \mu_1 x_3$ | HQ | | 0 |
| XLIV..... | Id. | Id. | $\mu_2 x_1 + \mu_3 x_3$ | HQ | Tangentes. | 0 |
| XLV .... | $\mu_2 x_1 - \mu_1 x_3$ | $\mu_3 x_2 - \mu_2 x_1$ | $(1+a)\mu_1 x_2 + (1-a)\mu_2 x_1 + \mu_3 x_3$, $a^2 \neq 1$ (1) | IQ | | 0 |
| XLVI. ... | Id. | Id. | $(1+a)\mu_1 x_2 + (1-a)\mu_2 x_1$ | III | | 0 |
| XLVII.... | Id. | Id. | $\mu_1 (x_2 + x_3) + \mu_2 (x_2 - x_1) + \mu_3 x_1$ | IQ | Tangentes. | 0 |
| XLVIII... | Id. | Id. | $\mu_1 x_2 + \mu_2 (x_2 - x_1) + \mu_3 x_3$ | III | Concourantes. | 0 |
| XLIX..... | Id. | Id. | $\mu_1 x_2 + \mu_2 (x_2 - x_1)$ | $I^2I$ | | 0 |
| L......... | Id. | Id. | $\mu_3 x_3 + \mu_1 x_2 - \mu_2 x_1$ | $I^3$ | | 0 |
| LI........ | Id. | Id. | $\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1$ | $\Delta = 0$ | | 0 |

(1) *Observations.* — Pour $a^2 = 1$, le type XLV serait équivalent à XXXVI et le type XLVI à XXVIII.

# *Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hypercomplexe, correspondent à la monogénéité;*

Par M. Léon AUTONNE.

## Introduction.

Une quantité ou grandeur hypercomplexe $x$, appartenant à un groupe ($\varepsilon$) d'ordre $n$, est, comme on sait, une expression

$$x = \sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Les $x_\beta$ sont des nombres ordinaires, réels ou complexes. Les $\varepsilon_\beta$ sont des symboles, choisis de façon que le produit de deux quantités quelconques prises dans le groupe ($\varepsilon$) appartienne encore au même groupe.

La théorie des quantités hypercomplexes est aujourd'hui bien connue, grâce aux recherches de Gauss, puis de MM. Poincaré, Dedekind, Study, etc., enfin, plus récemment, de MM. Molien, Cartan, Frobenius.

Ce dernier auteur, dans son Mémoire : *Theorie der hyperkomplexen Grössen* (*Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin,* pour avril 1903) a adopté une méthode d'exposition, fondée sur la pure Algèbre, sans aucune intervention des groupes de Lie. Je suivrai la même méthode, me conformant à la terminologie et aux notations de M. Frobenius.

Prenons $n$ fonctions $X_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ des $n$ variables $x_\beta$,

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

La quantité hypercomplexe

$$X = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha X_\alpha$$

sera par définition une fonction de la variable hypercomplexe

$$x = \sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta.$$

J'écrirai, avec M. Frobenius, $X = f((x))$, réservant la notation $f(x)$ aux fonctions des variables $x_\beta$.

Existe-t-il pour X quelque chose qui ressemble à la monogénéité des fonctions d'une variable complexe?

M. Scheffers (*Comptes rendus*, mai 1903) s'est posé la question. Il a reconnu que la monogénéité ne pouvait, dans ses traits principaux, être étendue qu'aux groupes $(\varepsilon)$ à multiplication commutative.

Dans le présent travail je m'occupe des $r^2$ — ions (quaternions, pour $r = 2, \ldots$), c'est-à-dire du cas où $(\varepsilon)$ est un groupe simple, par conséquent à multiplication non commutative, avec $n = r^2$.

J'ai cherché ce que devenait la monogénéité.

Pour les quantités complexes ordinaires, la monogénéité, comme on sait, consiste en ceci : la différentielle $dX$ de la fonction est égale au produit $u\,dx$ de la différentielle $dx$ de la variable par la quantité complexe $u$.

Pour les $r^2$ — ions, la multiplication n'est plus commutative. L'expression $u\,dx$ est à remplacer par l'expression $u\,dx\,v$. Ces expressions $u\,dx\,v$ ne se réduisent pas ensemble, au moins en général. Le problème se formule donc ainsi : mettre $dX$ sous la forme

$$dX = \sum_i u_i\,dx\,v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N').$$

La décomposition est possible de plusieurs façons, mais le minimum des nombres N' sera la *catégorie* N ou *indice de monogénéité*.

J'ai construit une matrice $n$ — aire $W(x)$, dont les $n^2$ éléments sont de la forme

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta},$$

où les constantes $c_{\alpha\beta}$ dépendent seulement du groupe $(\varepsilon)$ et sont les mêmes pour toutes les fonctions $f((x))$. *Le rang de cette matrice* $W(x)$ *est la catégorie*. Les $u_i$ et $v_i$ se déduisent de $W(x)$.

Vis-à-vis du changement de symboles $\varepsilon$, N se comporte comme un invariant. Plus généralement sont covariants les *Elementarteiler de Weierstrass* pour le faisceau de matrices $n$ — aire

$$\rho W(x) + W'(x) \qquad \rho = \text{param. variable.}$$

Comment se comporte $W(x)$ vis-à-vis du changement de la variable hypercomplexe?

Soit d'abord $X = f((x))$. Posons

$$x_\beta = \varphi_\beta(y_1, \ldots, y_n), \qquad y = \sum_\gamma \varepsilon_\gamma y_\gamma \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, n);$$

on aura

$$x = \varphi((y))$$

et, par suite,

$$X = F((y)).$$

Nommons $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{P}$ respectivement les matrices W afférentes à $f((x))$ et à $\varphi((y))$, $\mathfrak{W}$ celle afférente à $F((y))$.

Il existe un groupe $(\varepsilon\varepsilon)$ d'ordre $n^2$, simple comme $(\varepsilon)$, connu sans ambiguïté dès que $(\varepsilon)$ est donné. Si les $n^2$ éléments des matrices $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{W}$ sont les coordonnées des quantités hypercomplexes U, V, W dans $(\varepsilon\varepsilon)$ [comme les $x_\beta$ sont les coordonnées de $x$ dans $(\varepsilon)$], alors W *est le produit* UV *dans* $(\varepsilon\varepsilon)$ *des deux quantités* U *et* V.

Le nombre N peut donc être pris comme un élément de classification pour les fonctions

$$f((x)).$$

N ne peut dépasser $n$. Pour $N = 0$, X est une constante. Enfin j'ai

construit toutes les fonctions $X = f((x))$, où l'indice N de monogénéité est *un*.

Les résultats de cette construction sont plus simples quand on fait usage, dans $(\varepsilon)$, de coordonnées $x_{\alpha\beta}$ et de symboles $\varepsilon_{\alpha\beta}$ à double indice

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r; \qquad n = r^2).$$

Alors, comme on sait, à trois quantités $x$, $y$, $z$ de $(\varepsilon)$ correspondent les trois matrices $r =$ aires :

$$(x) = \begin{pmatrix} x_{11} \ldots x_{1r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{r1} \ldots x_{rr} \end{pmatrix}; \qquad (y) = \ldots; \qquad (z) = \ldots;$$

si $x = yz$, on a aussi

$$(x) = (y)(z).$$

Voici alors l'énumération des types auxquels peut être ramenée une fonction $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r)$, $X = f((x))$, ou

$$X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}(x_{11}, \ldots, x_{rr}),$$

de catégorie un.

*Type I.*

$X = KxL + M$, où K, L, M sont trois constantes hypercomplexes de $(\varepsilon)$.

*Type II.*

$$X = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha 1} X_{\alpha 1}(t_\alpha),$$

$$t_\alpha = \sum_{\beta} K_{\alpha\beta} x_{\beta 1}, \qquad K_{\alpha\beta} = \text{const.},$$

la fonction $X_{\alpha 1}(t)$ d'une variable $t$ est arbitraire.

*Type III.*

$$X = \sum_{\delta} \varepsilon_{1\delta} X_{1\delta}(x_{11}, \ldots, x_{1r}),$$

$$X_{1\delta} = \text{fonction arbitraire.}$$

*Type IV.*

$$X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}(\omega); \qquad X_{\alpha\delta}(t) = \int \eta_\alpha(t)\, p_\delta(t)\, dt,$$

$$\omega = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_r)$$

$$q_\gamma = \sum_\beta h_\beta x_{\beta\gamma} \qquad (h_\beta = \text{const.}),$$

$$\eta_\alpha(t), \quad p_\delta(t), \qquad \psi = \text{fonctions arbitraires},$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r.$$

Un résumé des présentes recherches a paru aux *Comptes rendus* du 28 mai 1906. Une application des présentes théories a paru au *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1906, sous le titre : *Sur les polynomes à coefficients et à variable hypercomplexes.*

---

## PRÉLIMINAIRES.

### DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

**1.** On fera, dans le présent Travail, un usage continuel des *matrices n — aires*

$$u = [u_{\alpha\beta}] = \left\{ \begin{matrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{\alpha 1} & u_{\alpha\beta} & u_{\alpha n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{matrix} \right\};$$

le premier indice de l'*élément* $u_{\alpha\beta}$ indique la ligne, le second indique la colonne. On écrira aussi, $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$,

$$u_{\alpha\beta} = |u|_{\alpha\beta}.$$

Notamment, dans le produit $uv$ des deux matrices $n$-aires $|u_{\alpha\beta}|$ et

$[v_{\beta\gamma}]$, on a

$$[uv]_{\alpha\gamma} = \sum_\beta u_{\alpha\beta} v_{\beta\gamma} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, n).$$

D'ailleurs, suivant l'usage, $u$ a pour transposée $u' = [u_{\beta\alpha}]$. Je suppose aussi connue du lecteur la théorie des *Elementarteiler* de Weierstrass.

**2.** Si l'on a $n$ fonctions $X_\alpha$ des $n$ variables $x_\beta$, la matrice $n$ — aire

$$J = [X_{\alpha\beta}], \qquad X_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}$$

sera la jacobienne des X par rapport aux variables $x$. On écrira

$$J = J\begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} X_1 \ldots X_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix}; \qquad |J| = \frac{\partial(X_1, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

**3.** Dans la théorie des quantités hypercomplexes, je me conformerai rigoureusement à la terminologie de M. Frobenius dans sa *Theorie der hyperkomplexen Grössen* (*Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin*, avril 1903), ainsi qu'aux notations de cet éminent géomètre.

Renvoyant au travail précité pour toutes explications générales et toutes démonstrations, je résume rapidement les résultats dont je me servirai le plus fréquemment dans la suite. Le renvoi (Fr., § 17), par exemple, indiquera le 17ᵉ paragraphe du Mémoire de M. Frobenius.

**4.** Prenons un groupe $(\varepsilon)$ de quantités hypercomplexes. $(\varepsilon)$ sera d'ordre $n$ et *simple* par hypothèse; par conséquent $n$ sera un carré parfait $n = r^2$. Pour $r = 2$, on a les quaternions.

$(\varepsilon)$ comporte $n$ nombres fondamentaux (*Grundzahl*), linéairement indépendants,

$$\varepsilon_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

qui se multiplient, par définition, suivant la règle suivante :

$$(o) \qquad \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma} \qquad (a_{\alpha\beta\gamma} = \text{const.})$$

Une quantité hypercomplexe est une expression

$$x = \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha x_\alpha,$$

où $x_\alpha$ est un nombre ordinaire (ou *scalaire*) réel ou complexe. Les $x_\alpha$ sont les $n$ coordonnées de $x$.

**5.** Soit $F(\xi, y, z)$ la forme trilinéaire $n$ — aire

$$F(\xi, y, z) = \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} \xi_\alpha y_\beta z_\gamma.$$

Posons

$$r_{\beta\gamma}(\xi) = \frac{\partial^2 F}{\partial y_\beta \, \partial z_\gamma}, \qquad s_{\alpha\gamma}(y) = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_\alpha \, \partial z_\gamma},$$

$$t_{\alpha\beta}(z) = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_\alpha \, \partial y_\beta}.$$

Introduisons

| | |
|---|---|
| La matrice du groupe.............. | $S_y = S(y) = [s_{\alpha\gamma}(y)]$, |
| La matrice parastrophe............ | $R_\xi = R(\xi) = [r_{\beta\gamma}(\xi)]$, |
| La matrice antistrophe ............ | $T_z = T(z) = [t_{\alpha\beta}(z)]$. |

Comme le groupe $(\varepsilon)$ est simple, le déterminant

$$\Theta(y) = |S(y)|,$$

forme de degré $n$ par rapport aux $y$, est la puissance $r^{\text{ième}}$ d'une forme irréductible $\Phi(y)$ de degré $r$. Les trois déterminants $|S(x)|$, $|T(x)|$ et $|R(x)|$ ne diffèrent que par un facteur constant et ont mêmes *Elementarteiler*.

Il existe une unité principale (*Haupteinheit*)

$$e = \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha e_\alpha,$$

telle que $S(e) = T(e) = E$, E étant la matrice $n$ — aire unité.

**6.** Le produit $x = yz$ de deux quantités hypercomplexes se calcule par la règle ordinaire, mais en tenant compte de la formule (o). Il vient

$$(1) \qquad x_\alpha = \sum_{\beta\gamma} y_\beta z_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}.$$

La multiplication n'est pas commutative. Pour exprimer qu'elle est associative, on écrit que, pour $y$ et $z$ quelconques, $S(x)$ et $T(y)$ sont échangeables ou que

$$(2) \qquad R_\xi S_x = T'_x R_\xi \qquad (\xi \text{ quelconque}).$$

On a, d'ailleurs,

$$S(yz) = S(y)S(z), \qquad T(yz) = T(z)T(y).$$

**7.** Prenons les quantités (Fr., § 7)

$$\sigma_\alpha = \tau_\alpha = \sum_\lambda a_{\lambda\alpha\lambda} = \sum_\lambda a_{\lambda\lambda\alpha} \qquad (\alpha, \lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

La matrice $P = R(\sigma)$ est symétrique avec son déterminant $|P| \neq 0$ [ce qui, joint au non évanouissement identique de $|S(x)|$ fait de $(\varepsilon)$ un groupe de Dedekind].

Une quantité invariante $x$ (Fr., § 4) est, par définition, échangeable à toute quantité $y$ de $(\varepsilon)$, $xy = yx$. On a

$$S(x) = T(x).$$

Pour qu'un groupe de Dedekind soit simple (Fr., § 14), il faut et il suffit que l'unité principale $e$ soit la seule quantité invariante.

**8.** Un changement de fondamentaux (Fr., § 9) consiste à poser

$$\varepsilon_\alpha = \sum_\beta \bar{\varepsilon}_\beta c_{\alpha\beta}, \qquad |c_{\alpha\beta}| \neq 0 \qquad c_{\alpha\beta} = \text{const.}$$

**9.** A côté des coordonnées *générales* $x_\alpha$, dont on vient de se servir, on peut introduire (Fr., § 11) des coordonnées *spéciales*.

Au lieu d'un indice unique $\alpha$ variant de 1 à $n$, on prend deux indices $\alpha$ et $\beta$ variant chacun de 1 à $r$, $n = r^2$. Il y a alors les $n$ fondamentaux $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (fonctions linéaires, homogènes, à coefficients constants, des fondamentaux précédents) *speciaux*, tels que

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta} = 0 \qquad \text{pour } \beta \neq \gamma, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\gamma},$$

forme spéciale de la formule (0). La quantité $x$ a $n = r^2$ coordonnées spéciales $x_{\alpha\beta}$, qui définissent une matrice $r$ — aire

$$(x) = [x_{\alpha\beta}].$$

Si $x = yz$, alors $(x) = (y)(z)$. C'est la forme spéciale de la formule (1).

Soit $g$ une quantité hypercomplexe. Prenons $(g) = [g_{\alpha\beta}]$. Transformons toutes les matrices $r$ — aires, telles que $(x)$ par la $r$ — aire $(g)$. Cela équivaut à un changement de fondamentaux (8) et, comme on s'assure aisément, *les coordonnées restent spéciales*, pourvu, bien entendu, que le déterminant de $(g)$ soit $\neq 0$.

Les coordonnées spéciales jouent dans les présentes recherches un rôle capital.

## CHAPITRE I.

### CATÉGORIE OU INDICE DE MONOGÉNÉITÉ.

**1.** Prenons $n$ variables indépendantes scalaires $x_\alpha$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ et la variable hypercomplexe

$$x = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha x_\alpha.$$

L'expression

$$c_0 x c_1 x \ldots c_{m-1} x c_m,$$

où le facteur $x$ est répété $m$ fois, sera dite un *monome de degré m*. Les $m+1$ constantes hypercomplexes $c_0, \ldots, c_m$ sont les *coefficients* du monome.

Une somme de monomes de degré $m$ est un *polynome homogène* ou *forme* de degré $m$. Un polynome non homogène est évidemment une somme de formes.

Une forme $\Lambda$ de degré $m$ est une expression, telle que

(1) $$\Lambda = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \Lambda_\alpha \binom{m}{x},$$

où $\Lambda_\alpha \binom{m}{x}$ est une forme scalaire de degré $m$.

Nous verrons dans la suite qu'une expression X donnée (1) peut se décomposer de plusieurs façons en une somme de monomes. Le nombre minimum des monomes, dans les diverses décompositions, se nommera *catégorie* de la forme X.

**2.** Le premier problème qui nous occupera sera celui-ci :

*Trouver la catégorie, d'une expression X, pour le premier degré, $m=1$.*

Considérons une somme de $\mathfrak{U}$ monomes :

$$\omega = \sum_i u_i x v_i \qquad (i=1, 2, \ldots, \mathfrak{U}).$$

On a

$$u_i = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda u_{i\lambda}, \qquad v_i = \sum_\mu v_{i\mu}\varepsilon_\mu,$$

$$\omega = \sum_i \left(\sum_\lambda \varepsilon_\lambda u_{i\lambda}\right)\left(\sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta\right)\left(\sum_\mu \varepsilon_\mu v_{i\mu}\right)$$
$$= \sum_{i\lambda\mu\beta} u_{i\lambda} v_{i\mu} x_\beta \varepsilon_\lambda \varepsilon_\beta \varepsilon_\mu.$$

Or

$$\varepsilon_\lambda \varepsilon_\beta \varepsilon_\mu = \varepsilon_\lambda \sum_\rho \varepsilon_\rho a_{\rho\beta\mu} = \sum_{\alpha\rho} \varepsilon_\alpha a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu} \qquad (\alpha, \beta, \lambda, \mu, \rho = 1, 2, \ldots, n).$$

Enfin

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega &= \sum_{i\alpha\beta\lambda\mu\rho} \varepsilon_\alpha u_{i\lambda} v_{i\mu} x_\beta a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu} \\ &= \sum_{\alpha\beta\lambda\mu} \varepsilon_\alpha x_\beta w_{\lambda\mu} \sum_\rho a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu}, \\ w_{\lambda\mu} &= \sum_i u_{i\lambda} v_{i\mu}. \end{aligned} \right.$$

Identifions avec le polynome X du premier degré (1),

$$X = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_\alpha x_\beta X_{\alpha\beta}, \qquad X_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} = \text{const.}$$

Il viendra

$$(3)\qquad X_{\alpha\beta}=\sum_{\lambda\mu}\varpi_{\lambda\mu}\sum_{\rho}a_{\alpha\lambda\rho}a_{\rho\beta\mu}.$$

Si X est donné, les $n^2$ inconnues $\varpi_{\lambda\mu}$ s'obtiennent par la résolution des $n^2$ équations linéaires (3).

On démontrera plus loin (5) que ces équations admettent toujours une et une seule solution; autrement dit : on obtient un déterminant $n^2$ — aire différent de zéro, en rangeant, parmi les expressions, au nombre de $n^4$,

$$(4)\qquad \Omega(\alpha,\beta,\lambda,\mu)=\sum_{\rho}a_{\alpha\lambda\rho}a_{\rho\beta\mu};$$

dans une même ligne, celles où la combinaison $\alpha\beta$ d'indices est la même; dans une même colonne, celles où la combinaison $\lambda\mu$ est la même.

**5.** Considérons la matrice $n$ — aire $W=[\varpi_{\lambda\mu}]$, dont le rang est $\mathfrak{N}$.

Théorème. — *Le rang* $\mathfrak{N}$ *de* W *est la catégorie* N *du polynome* X.

I. W ayant le rang $\mathfrak{N}$, la théorie des déterminants apprend qu'il existe $2n\mathfrak{N}$ quantités

$$u_{j\lambda},\qquad v_{j\mu}\qquad (j=1,2,\ldots,\mathfrak{N};\ \lambda,\mu=1,2,\ldots,n),$$

telles que

$$\varpi_{\lambda\mu}=\sum u_{j\lambda}v_{j\mu}.$$

Alors les formules (3) et (4) donnent

$$X_{\alpha\beta}=\sum_{j\lambda\mu}u_{j\lambda}v_{j\mu}\,\Omega(\alpha,\beta;\lambda,\mu)$$

et, d'autre part (2),

$$\sum_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}\,\Omega(\alpha,\beta;\lambda,\mu)=\varepsilon_{\lambda}\varepsilon_{\beta}\varepsilon_{\mu}.$$

Alors

$$(5)\quad \begin{cases} X = \sum_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}\varepsilon_\alpha x_\beta = \sum_{j\lambda\mu} u_{j\lambda} v_{j\mu} x_\beta \varepsilon_\lambda \varepsilon_\beta \varepsilon_\mu \\ \quad = \sum_j u_j x v_j, \end{cases}$$

$u_j$ et $v_j$ étant les quantités hypercomplexes

$$u_j = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda u_{j\lambda}, \qquad v_j = \sum_\mu \varepsilon_\mu v_{j\mu}.$$

Ainsi X se décompose en une somme de $\mathfrak{N}$ monomes. En vertu de la définition de la catégorie (**1**), on a

$$(6)\qquad \mathfrak{N} \geqq N.$$

II. La catégorie étant N, X est identique à une somme de N monomes,

$$X = \sum_l u_l x v_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, N),$$

$$u_l = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda u_{l\lambda}, \qquad v_l = \sum_\mu \varepsilon_\mu v_{\lambda\mu}.$$

L'identification donne, par le même calcul qu'au nº **2**,

$$X_{\alpha\beta} = \sum_{l\lambda\mu} u_{l\lambda} v_{l\mu} \Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu).$$

Mais les équations de la formule (3) ont une solution unique et

$$w_{\lambda\mu} = \sum_l u_{l\lambda} v_{l\mu} \qquad (l = 1, 2, \ldots, N).$$

N ne peut être inférieur au rang $\mathfrak{N}$ de W et

$$(7)\qquad \mathfrak{N} \leqq N.$$

III. La comparaison des formules (6) et (7) donne

$$\mathfrak{N} = N. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le problème relatif à la décomposition de la forme X en une somme de monomes se ramène ainsi à l'étude de la matrice $n$ — aire W.

4. La matrice $n$ — aire

$$J = [X_{\alpha\beta}], \qquad X_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}$$

est la jacobienne des $n$ expressions $X_\alpha$ par rapport aux $n$ variables $x_\beta$.

On s'assure aisément que

$$a_{\alpha\lambda\rho} = s_{\alpha\rho}(\varepsilon_\lambda), \qquad a_{\rho\beta\mu} = t_{\rho\beta}(\varepsilon_\mu)$$

(voir *Préliminaires*, **5**). Alors on a

$$\Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu) = \sum_\rho a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu} = \sum_\rho s_{\alpha\rho}(\varepsilon_\lambda)\, t_{\rho\beta}(\varepsilon_\mu)$$
$$= [S(\varepsilon_\lambda)\, T(\varepsilon_\mu)]_{\alpha\beta} \qquad (\textit{Préliminaires}, \mathbf{1}).$$

Alors la formule (3) s'écrit

$$X_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} [S(\varepsilon_\lambda)\, T(\varepsilon_\mu)]_{\alpha\beta} = \left[\sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} S(\varepsilon_\lambda)\, T(\varepsilon_\mu)\right]_{\alpha\beta},$$

c'est-à-dire

$$(8) \qquad J = K(w) = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu},$$

où $K_{\lambda\mu}$ désigne la matrice $n$ — aire

$$S(\varepsilon_\lambda)\, T(\varepsilon_\mu) = T(\varepsilon_\mu)\, S(\varepsilon_\lambda).$$

En vertu de ce qui a été dit : *Les deux matrices $n$ — aires* J *et* W *se correspondent, par la formule* (8), *sans ambiguïté.*

Notamment, pour que $W = 0$, il faut et il suffit que $J = 0$.

La règle pour décomposer une forme linéaire X en une somme de monomes est donc la suivante :

*La matrice* J *étant connue, calculer la matrice* W *par la formule* (8); *calculer ensuite, ce qui est possible d'une infinité de*

*façons, les* $2n\mathfrak{N} = 2n\text{N}$ *quantités*

$$u_{i\lambda},\qquad v_{i\mu}\qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, \text{N})$$

$$w_{\lambda\mu} = \sum_i u_{i\lambda} v_{i\mu}$$

[$\text{N} = \mathfrak{N}$ *étant le rang de* W *et la catégorie de* X]; *alors on a*

$$\text{X} = \sum_i u_i x v_i,$$

$u_i$, $v_i$ *étant les quantités hypercomplexes dont les* $u_{i\lambda}$ *et* $v_{i\mu}$ *sont les coordonnées.*

**3.** Voyons ce que deviennent les calculs précédents quand on fait usage des coordonnées *spéciales* (voir *Préliminaires*).

On a

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r;\ n = r^2),$$

(9) $$\text{X} = \sum_{\alpha\delta} \text{X}_{\alpha\delta}\varepsilon_{\alpha\delta} = \sum_{\gamma\beta\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} x_{\beta\gamma} \frac{\partial \text{X}_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}},$$

l'analogue de la formule (1).

Prenons ensuite les 2 N quantités hypercomplexes ($i = 1, 2, \ldots, \text{N}$),

$$u_i = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} u_{i\alpha\beta},\qquad v_i = \sum_{\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} v_{i\gamma\delta}.$$

On aura [(*Préliminaires*, **9**), par la multiplication des matrices $(u_i)$, $(x)$ et $(v_i)$],

$$\sum_i u_i x v_i = \sum_{i\beta\gamma\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} u_{i\alpha\beta} x_{\beta\gamma} v_{i\gamma\delta},$$

et, identifiant avec X,

(10) $$\frac{\partial \text{X}_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}} = \sum_i u_{i\alpha\beta} v_{i\gamma\delta} = w_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

formule analogue à (3).

Disposons les $n^2 = r^4$ quantités $w_{\alpha\beta\gamma\beta}$ comme les éléments d'une matrice $n$ — aire W, les combinaisons $\alpha\beta$ d'indices donnant les lignes,

tandis que les combinaisons $\gamma\delta$ donnent les colonnes. On retombe ainsi sur la matrice W de rang N.

On voit sur la formule (10) que les $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sont connues sans ambiguïté dès qu'on possède les $r^4$ dérivées partielles

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}}.$$

Disposons ces dérivées suivant une matrice $n$ — aire où les $\alpha\delta$ indiqueront les lignes et les $\beta\gamma$ les colonnes. On aura la jacobienne J (4). Les deux matrices J et W se définiront l'une l'autre sans ambiguïté.

La formule (10), analogue à la formule (3), justifie la résolubilité annoncée (2) des équations (3') par rapport aux $n^2$ inconnues $w$.

**6**. On verra, au Chapitre III, pourquoi, dans certains cas, la catégorie se nomme aussi *indice de monogénéité*.

## CHAPITRE II.

### GROUPE ($\varepsilon\varepsilon$) D'ORDRE $n^2$.

**7**. Prenons une matrice $n$ — aire $W = [w_{\lambda\mu}]$ et considérons les $n^2$ quantités $w_{\lambda\mu}$ comme les $n^2$ coordonnées d'une grandeur hypercomplexe $w$ dans un groupe ($\varepsilon\varepsilon$). La grandeur $w$ et la matrice $n$ — aire

$$K(w) = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} \qquad (4)$$

se définissent l'une l'autre sans ambiguïté.

La multiplication dans le groupe ($\varepsilon\varepsilon$) sera donnée par la règle suivante :

*Si, dans* ($\varepsilon\varepsilon$), $w = uv$, *on a*

$$K(w) = K(u) K(v).$$

Il est utile pour la suite de construire et de discuter le groupe ($\varepsilon\varepsilon$).

Il est évident que les matrices $n$ — aires $K(w)$ fournissent une représentation ou *Darstellung* du groupe ($\varepsilon\varepsilon$), lequel a l'ordre $n^2$ (Frobenius, § **16**).

**8.** On a (4) :

$$(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta' \beta'', \gamma, \gamma' \gamma'', \lambda, \lambda', \mu, \mu' = 1, 2 \ldots n),$$

$$K_{\lambda\mu} = S(\varepsilon_\lambda) T(\varepsilon_\mu) = T(\varepsilon_\mu) S(\varepsilon_\lambda),$$

$$\begin{aligned} K_{\lambda\mu} K_{\lambda'\mu'} &= S(\varepsilon_\lambda) T(\varepsilon_\mu) S(\varepsilon_{\lambda'}) T(\varepsilon_{\mu'}) \\ &= S(\varepsilon_\lambda) S(\varepsilon_{\lambda'}) T(\varepsilon_\mu) T(\varepsilon_{\mu'}) = S(\varepsilon_\lambda \varepsilon_{\lambda'}) T(\varepsilon_{\mu'} \varepsilon_\mu) \\ &= S\left(\sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\lambda\lambda'}\right) T\left(\sum_{\alpha'} \varepsilon_{\alpha'} a_{\alpha'\mu'\mu}\right) \\ &= \left[\sum_\alpha a_{\alpha\lambda\lambda'} S(\varepsilon_\alpha)\right]\left[\sum_{\alpha'} a_{\alpha'\mu'\mu} T(\varepsilon_{\alpha'})\right] \\ &= \sum_{\alpha\alpha'} a_{\alpha\lambda\lambda'} a_{\alpha'\mu'\mu} K_{\alpha\alpha'} \end{aligned}$$

(voir *Préliminaires*).

D'où la formule, changeant un peu les notations,

(11) $$K_{\beta'\beta''} K_{\gamma'\gamma''} = \sum_{\alpha'\alpha''} K_{\alpha'\alpha''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''}.$$

Il vient alors, si $w = uv$ dans $(\varepsilon\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} K(w) = K(u) K(v) &= \left(\sum_{\beta'\beta''} u_{\beta'\beta''} K_{\beta'\beta''}\right)\left(\sum_{\gamma'\gamma''} v_{\gamma'\gamma''} K_{\gamma'\gamma''}\right) \\ &= \sum_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''} u_{\beta'\beta''} v_{\gamma'\gamma''} K_{\beta'\beta''} K_{\gamma'\gamma''} \\ &= \sum_{\alpha'\alpha''} K_{\alpha'\alpha''} \sum_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''} u_{\beta'\beta''} v_{\gamma'\gamma''}. \end{aligned}$$

La formule de multiplication dans $(\varepsilon\varepsilon)$ est ainsi

(12) $$w_{\alpha'\alpha''} = \sum_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''} u_{\beta'\beta''} v_{\gamma'\gamma''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''}.$$

**9.** Il est facile d'avoir des formules calquées sur celles du groupe $(\varepsilon)$, rappelées dans les *Préliminaires*.

Prenons trois indices $g$, $h$, $k$ variant de 1 à $n^2$ et faisons corres-

pondre $g$ à $\alpha'\alpha''$, $h$ à $\beta'\beta''$, $k$ à $\gamma'\gamma''$. On écrira

$$(13)\qquad \begin{cases} w_g = \sum_{hk} u_h v_k A_{ghk}, \\ A_{ghk} = a_{\alpha'\beta'\gamma'}\, a_{\alpha''\gamma''\beta''}. \end{cases}$$

Le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$ comportera $n^2$ fondamentaux $\varepsilon_g$ ou $\varepsilon_{\alpha'\alpha''}$, dont la multiplication sera donnée par la formule (14), tirée de la formule (11),

$$(14)\qquad \varepsilon_h \varepsilon_k = \sum_g \varepsilon_g A_{ghk}.$$

On désignera, pour le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$, par les lettres

$$\mathfrak{F},\quad \mathfrak{R},\quad \mathfrak{S},\quad \mathfrak{T},\quad \mathfrak{P},$$

ce qui, pour le groupe $(\varepsilon)$, a été désigné aux *Préliminaires* par les lettres

F, R, S, T, P.

On aura exactement les mêmes formules, sauf que les lettres $a$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont remplacées par les lettres A, $g$, $h$, $k$.

Ainsi, pour la forme trilinéaire,

$$\mathfrak{F}(\xi, u, v) = \sum_{ghk} A_{ghk} \xi_g u_h v_k;$$

pour la matrice parastrophe $\mathfrak{R}(\xi)$,

$$\mathfrak{R}_{hk}(\xi) = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial u_h\, \partial v_k};$$

pour la matrice du groupe $(\varepsilon\varepsilon)$,

$$\mathfrak{S}_{gk}(u) = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \xi_g\, \partial v_k};$$

pour la matrice antistrophe,

$$\mathfrak{F}_{gh}(v) = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \xi_g\, \partial u_h},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

**10**. Montrons brièvement que les propriétés du groupe $(\varepsilon)$ se conservent pour $(\varepsilon\varepsilon)$.

I. Aucun des trois déterminants $n^2$ — aires

$$|\mathcal{R}(\xi)|, \quad |\mathcal{S}(u)|, \quad |\mathfrak{S}(v)|$$

ne s'évanouit identiquement.

Soit, par exemple, le déterminant parastrophe $|\mathcal{R}(\xi)|$. Montrons que ce déterminant ne s'évanouit pas pour $\xi$ convenablement choisi. Prenons

$$\xi_{\alpha'\alpha''} = c_{\alpha'}\,d_{\alpha''},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''}(\xi) &= \sum_{\alpha'\alpha''} a_{\alpha'\beta'\gamma'}\,a_{\alpha''\gamma''\beta''}\,c_{\alpha'}\,d_{\alpha''}\\ &= \left(\sum_{\alpha'} a_{\alpha'\beta'\gamma'}\,c_{\alpha'}\right)\left(\sum_{\alpha''} a_{\alpha''\gamma''\beta''}\,d_{\alpha''}\right)\\ &= r_{\beta'\gamma'}(c)\,r'_{\gamma''\beta''}(d) \qquad (\textit{Préliminaires}, \mathbf{5});\end{aligned}$$

le déterminant parastrophe est

$$|r_{\beta'\gamma'}(c)\,r'_{\gamma''\beta''}(d)|.$$

Dans ce déterminant $n^2$ — aire, les lignes correspondent aux combinaisons $\beta'\beta''$, les colonnes aux combinaisons $\gamma'\gamma''$. Donc, en vertu d'un théorème de Kronecker (Pascal, *Die Determinanten*, p. 107), ce déterminant est

$$|r_{\beta'\gamma'}(c)|^n\,|r'_{\beta''\gamma''}(d)|^n = |\mathrm{R}(c)|^n\,|\mathrm{R}(d)|^n \neq 0,$$

pour $c$ et $d$ quelconques.

Le raisonnement est analogue pour $|\mathcal{S}(u)|$ et $|\mathfrak{S}(v)|$.

Un corollaire est que l'on ne peut avoir, *pour $v$ quelconque*, $uv = 0$ sans avoir aussi $u = 0$.

En effet, la formule (13) donnerait

$$0 = \sum_{hk} \mathrm{A}_{ghk}\,u_h v_k = \sum_h u_h \sum_k \mathrm{A}_{ghk}\,v_k = \sum_h u_h\,\mathfrak{S}_{gh}(v)$$

pour $g, h, k = 1, 2, \ldots, n^2$.

Comme, pour $v$ quelconque, $|\mathfrak{S}(v)| \neq 0$, $u_h = 0$. C. Q. F. D.

**11.** II. Dans ($\varepsilon\varepsilon$) la multiplication est associative, puisqu'elle est fondée sur la multiplication des matrices $n$ — aires (**7**), laquelle est associative.

III. Les $n^2$ fondamentaux $\varepsilon_g$ ou $\varepsilon_{\alpha'\alpha''}$ sont linéairement indépendants. Supposons, en effet, pour $n^2$ constantes $\eta_{\alpha'\alpha''}$ convenablement choisies,

$$\sum_{\alpha'\alpha''} \eta_{\alpha'\alpha''}\varepsilon_{\alpha'\alpha''} = 0.$$

La quantité $\eta$, dont les coordonnées sont les $\eta_{\alpha'\alpha''}$, est nulle; donc $\eta v = 0$ pour $v$ quelconque, donc (I ci-dessus) $0 = \eta = \eta_{\alpha'\alpha''}$.

C. Q. F. D.

IV. Pour le groupe ($\varepsilon$), les quantités (Frobenius, § 7 et *Préliminaires*, **7**) $\sigma_\mu$ et $\sigma_{\mu'}$ qui figurent dans la trace de $|\,S(x)\,|$ sont

$$(\lambda, \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sigma_\mu = \sum_\lambda a_{\lambda\mu\lambda}, \qquad \sigma_{\mu'} = \sum_\lambda a_{\lambda\mu'\lambda}.$$

La quantité analogue est pour ($\varepsilon\varepsilon$)

$$\upsilon_h = \sum_g \mathrm{A}_{ghg} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n^2),$$

$g$, $h$, $k$ correspondant respectivement à $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$. D'ailleurs

$$\mathrm{A}_{ghk} = a_{\alpha'\beta'\gamma'}a_{\alpha''\gamma''\beta''}$$

et $\mathrm{A}_{ghg}$ s'obtient en faisant $\gamma' = \alpha'$, $\gamma'' = \alpha''$,

$$\upsilon_h = \sum_{\alpha'\alpha''} a_{\alpha'\beta'\alpha'}a_{\alpha''\alpha''\beta''} = \left(\sum_{\alpha'} a_{\alpha'\beta'\alpha'}\right)\left(\sum_{\alpha''} a_{\alpha''\alpha''\beta''}\right).$$

$\sum_{\alpha'} a_{\alpha'\beta'\alpha'}$, c'est $\sigma_{\beta'}$. Quant à $\sum_{\alpha''} a_{\alpha''\alpha''\beta''}$, c'est (Frobenius, *loc. cit.*),

$$\tau_{\beta''} = \sigma_{\beta''},$$

$\sum_{\beta''} \tau_{\beta''}x_{\beta''}$ étant la trace de $|\,T(x)\,|$.

Bref

$$\upsilon_h = \upsilon_{\beta'\beta''} = \sigma_{\beta'}\sigma_{\beta''}.$$

Le groupe $(\varepsilon)$ est un groupe de Dedekind (Frobenius, § 7) parce que le déterminant de la matrice symétrique $n$ — aire $P = R(\sigma)$ est $\neq 0$. Formons de même, pour le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$, la matrice $n^2$ — aire $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}(\upsilon)$, telle que

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''} &= \sum_{\alpha'\alpha''} \upsilon_{\alpha'\alpha''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''} = \sum_{\alpha'\alpha''} \sigma_{\alpha'}\sigma_{\alpha''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''} \\ &= \left(\sum_{\alpha'} \sigma_{\alpha'} a_{\alpha'\beta'\gamma'}\right)\left(\sum_{\alpha''} \sigma_{\alpha''} a_{\alpha''\gamma''\beta''}\right) \\ &= r_{\beta'\gamma'}(\sigma)\, r'_{\beta''\gamma''}(\sigma) = p_{\beta'\gamma'}\, p_{\beta''\gamma''}\end{aligned}$$

(*Préliminaires*, **7**), où

$$P = [p_{\beta'\gamma'}] = P' = [p_{\gamma'\beta'}].$$

Alors $|\mathfrak{P}| = |p_{\beta'\gamma'}p_{\beta''\gamma''}|$ et dans la matrice $n^2$ — aire $\mathfrak{P}$ les lignes sont indiquées par les indices $\beta'\beta''$ ou $h$, les colonnes par les indices $\gamma'\gamma''$ ou $k$. Le théorème de Kronecker, déjà invoqué, donne

$$|\mathfrak{P}| = |p_{\beta'\gamma'}|^n\, |p_{\beta''\gamma''}|^n = |P|^{2n} \neq 0.$$

D'ailleurs $\mathfrak{P}$ est symétrique.

Donc $(\varepsilon\varepsilon)$ *est un groupe de Dedekind.*

**12**. V. Cherchons l'unité principale de $(\varepsilon\varepsilon)$, que je nomme $\mathcal{E}$, de coordonnées $\mathcal{E}_{\lambda\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$. Sa matrice $n$ — aire $K(\mathcal{E})$ étant telle que $K(\mathcal{E})K(u) = K(u)$ pour $u$ quelconque, on a $K(\mathcal{E}) = E =$ la $n$ — aire unité. Posons $\mathcal{E}_{\lambda\mu} = e_\lambda e_\mu$, $e$ étant l'unité principale de $(\varepsilon)$. On a (**8**)

$$\begin{aligned}K(\mathcal{E}) &= \sum_{\lambda\mu} e_\lambda e_\mu K_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda\mu} e_\lambda e_\mu S(\varepsilon_\lambda)T(\varepsilon_\mu) \\ &= \left[\sum_{\lambda} e_\lambda S(\varepsilon_\lambda)\right]\left[\sum_{\mu} e_\mu T(\varepsilon_\mu)\right] = S(e)T(e) = E.\end{aligned}$$

Comme les quantités $u$ de $(\varepsilon\varepsilon)$ et les matrices $K(u)$ se définissent

mutuellement sans ambiguïté; $\mathcal{E}$, ainsi introduite, est la seule unité principale de $(\varepsilon\varepsilon)$.

**15.** VI. On a rappelé (*Préliminaires*, **7**) la définition de la grandeur invariante dans un groupe, ainsi que la proposition suivante :

*Pour qu'un groupe de Dedekind soit simple, il faut et il suffit que la seule grandeur invariante soit l'unité principale.*

Ce criterium permettra de voir que $(\varepsilon\varepsilon)$, déjà, en vertu de IV, groupe de Dedekind, est simple.

Soit $\upsilon$, $\upsilon \neq \mathcal{E}$ et $\neq 0$, une grandeur invariante de $(\varepsilon\varepsilon)$; on a, par définition, pour $u$ *quelconque* dans $(\varepsilon\varepsilon)$,

$$u_\upsilon = \upsilon u, \qquad \mathrm{K}(u)\,\mathrm{K}(\upsilon) = \mathrm{K}(\upsilon)\,\mathrm{K}(u).$$

Faisons, en particulier, successivement

$$u_{\lambda\mu} = e_\lambda \eta_\mu \qquad \text{et} \qquad u_{\lambda\mu} = e_\mu \check{\zeta}_\lambda;$$

il viendra

$$\mathrm{K}(u) = \sum_{\lambda\mu} e_\lambda \eta_\mu \,\mathrm{S}(\varepsilon_\lambda)\,\mathrm{T}(\varepsilon_\mu) = \mathrm{S}(e)\,\mathrm{T}(\eta) = \mathrm{T}(\eta),$$

$$\mathrm{K}(u) = \sum_{\lambda\mu} e_\mu \check{\zeta}_\lambda \,\mathrm{S}(\varepsilon_\lambda)\,\mathrm{T}(\varepsilon_\mu) = \mathrm{S}(\zeta)\,\mathrm{T}(e) = \mathrm{S}(\zeta).$$

$\mathrm{K}(\upsilon)$ est donc échangeable à $\mathrm{T}(\eta)$ et à $\mathrm{S}(\zeta)$. Frobenius (§ 1, *in fine*) montre qu'il y a dans $(\varepsilon)$ deux grandeurs $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$, telles que

$$\mathrm{K}(\upsilon) = \mathrm{S}(\mathfrak{x}) = \mathrm{T}(\mathfrak{y}).$$

On en déduit (Frobenius, § 14, théorème IV)

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = e.$$

De là

$$\mathrm{K}(\upsilon) = \mathrm{E}.$$

$\upsilon$ est donc l'unité principale forcément, puisque les grandeurs de $(\varepsilon\varepsilon)$ et les matrices K se définissent mutuellement sans ambiguïté.

C. Q. F. D.

**14.** Ainsi *le groupe* $(\varepsilon\varepsilon)$ *d'ordre* $n^2$ *est simple*, tout comme le groupe $(\varepsilon)$ d'ordre $n$.

La forme $|\mathfrak{s}(w)|$ de degré $n^2$, aux $n^2$ variables $w_{\lambda\mu}$, est, d'après les théories connues,

$$|\mathfrak{s}(w)| = [\Phi(w)]^n,$$

où $\Phi$ est une forme indécomposable de degré $n$.

Les $n$ — aires $K(w)$ fournissent une *Darstellung* de $(\varepsilon\varepsilon)$. Si

$$|K(w)| = \Theta(w),$$

on a

$$\Theta(uv) = \Theta(u)\Theta(v)$$

(Frobenius, dernier paragraphe) et $\Theta(w)$ est une puissance de $\Phi(w)$. Ils sont du même degré $n$ et l'on a, à un facteur constant près, $\Phi = \Theta$.

On a, pour le groupe $(\varepsilon)$ d'ordre $n = r^2$,

$$|S(z)| = [\varphi(z)]^r,$$

$\varphi(z)$ = forme de degré $r$ par rapport aux $n$ variables $z$.

Si l'on pose, en particulier, $w_{\lambda\mu} = \eta_\lambda \zeta_\mu$, $\eta$ et $\zeta$ quelconques,

$$K(w) = \sum_{\lambda\mu} \eta_\lambda \zeta_\mu T(\varepsilon_\mu) S(\varepsilon_\lambda) = S(\eta) T(\zeta),$$

$$|K(w)| = \Theta(w) = |S(\eta)|\,|T(\zeta)| = [\varphi(\eta)\varphi(\zeta)]^r = |\mathfrak{s}(w)|^{\frac{1}{n}}.$$

**15.** Reprenons les formules (3) et (4), qu'on écrira

$$(3) \qquad |b_{\alpha\beta}| = K(w) = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu},$$

$$(4) \qquad b_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} \Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu).$$

Les $w$ sont les coordonnées dans $(\varepsilon\varepsilon)$ de la quantité hypercomplexe $w$. D'autre part, le déterminant des $n^4$ quantités $\Omega$ est $\neq 0$. La formule (4) fournit donc, dans $(\varepsilon\varepsilon)$, un changement de fondamentaux (*Préliminaires*, **8**) et de coordonnées.

Dans ($\varepsilon\varepsilon$), pour $w = uv$, on a

$$K(w) = K(u) K(v).$$

Alors les $b_{\alpha\beta}$ peuvent être considérées comme des coordonnées *spéciales* dans ($\varepsilon\varepsilon$) (*Préliminaires*, **9**) et l'on peut écrire

$$K(w) = (w).$$

On verra plus bas (**32**) pourquoi nous avons dû étudier le groupe ($\varepsilon\varepsilon$).

## CHAPITRE III.

### MATRICE $W(x)$; SES PROPRIÉTÉS.

**16.** Soient

$$X_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

$n$ fonctions des $n$ variables scalaires $x_1, \ldots, x_n$. La grandeur hypercomplexe dans le groupe ($\varepsilon$),

$$X = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha X_\alpha,$$

sera, *par définition*, fonction de la variable hypercomplexe

$$x = \sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta.$$

X possède-t-elle quelques propriétés analogues à la monogénéité dans les fonctions d'une variable complexe?

M. Scheffers (*Comptes rendus*, mai 1893) a reconnu que la monogénéité ne pouvait être étendue qu'aux quantités hypercomplexes à multiplication commutative.

Je me propose de voir ce qui se passe pour un groupe ($\varepsilon$) simple, d'ordre $n = r^2$ et, par conséquent, à multiplication non commutative.

**17.** Prenons deux nombres réels, $x_1$ et $x_2$, la variable complexe

$$x = x_1 + i x_2 \qquad (i^2 + 1 = 0)$$

et la fonction

$$y = f(x) = X_1(x_1, x_2) + i X_2(x_1, x_2).$$

La monogénéité consiste en ce que $dy$ est égal au produit de la différentielle $dx$ par une certaine quantité complexe finie

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Avec la terminologie, introduite au Chapitre I, on peut dire : *la monogénéité consiste en ce que la différentielle de la fonction est, vis-à-vis la différentielle de la variable, un monome linéaire.*

Revenons aux fonctions d'une variable hypercomplexe. La différentielle

$$dX = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha\, dX_\alpha = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_\alpha\, dx_\beta\, X_{\alpha\beta}, \qquad X_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}$$

est, par rapport à $dx$, une *forme* (1) du premier degré.

Elle peut donc être mise (Chap. I) sous forme d'une somme de monomes en $dx$, c'est-à-dire d'un polynome linéaire en $dx$; la catégorie de ce polynome, qu'on peut nommer aussi *indice de monogénéité*, sera pour nous l'élément de classification pour les fonctions X. Les fonctions à indice *un* de monogénéité, telles que $dX = u\, dx\, v$, rappelleront les fonctions monogènes ordinaires.

**18.** Introduisons, comme au Chapitre I, la matrice $n$-aire,

$$W = W(x) = [w_{\lambda\mu}(x)],$$

telle que (form. 3),

$$X_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu}(x)\, \Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu),$$

$$\Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu) = \sum_\rho a_{\alpha\lambda\rho}\, a_{\rho\beta\mu},$$

$$\alpha, \beta, \lambda, \mu, \rho = 1, 2, \ldots, n.$$

Lorsqu'on fait usage des coordonnées spéciales,

$$x = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma}\, x_{\beta\gamma}, \qquad X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta}\, X_{\alpha\delta}(x),$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r; \qquad n = r^2$$

et

$$w_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}} \qquad \text{(form. 10)}:$$

dans la matrice W, l'élément $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ occupe la ligne d'indices $\alpha\beta$ et la colonne d'indices $\gamma\delta$.

Nous allons donc étudier de plus près la matrice W et notamment le rang de W, ainsi que la façon dont W provient de la jacobienne des fonctions X par rapport aux variables $x$.

**19**. Reprenons les coordonnées générales et voyons quelles modifications éprouve W, quand on effectue un changement de fondamentaux (Frobenius, § 9).

Rappelons quelques formules du Chapitre I,

$$J = [X_{\alpha\beta}] = \left[\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}\right] = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu},$$

$$\alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

$$K_{\lambda\mu} = S(\varepsilon_\lambda) T(\varepsilon_\mu),$$

$$\varepsilon_\lambda \varepsilon_\beta \varepsilon_\mu = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu} = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha [K_{\lambda\mu}]_{\alpha\beta}.$$

Prenons maintenant une matrice de constantes

$$B = [b_{\alpha\beta}], \qquad |B| = 1, \qquad B_{\alpha\beta} = \frac{\partial |B|}{\partial b_{\alpha\beta}}, \qquad B^{-1} = [B_{\beta\alpha}],$$

et posons (Frobenius, § 9), pour changer de fondamentaux,

$$\varepsilon = B[\bar{\varepsilon}], \qquad \varepsilon_l = \sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha b_{l\alpha},$$

$$\bar{\varepsilon} = B^{-1}[\varepsilon], \qquad \bar{\varepsilon}_l = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha B_{\alpha l}.$$

Le groupe $(\varepsilon)$ se change en le groupe $(\bar{\varepsilon})$. Je désignerai toutes les grandeurs et formations, afférentes à $(\bar{\varepsilon})$, par les mêmes lettres que les grandeurs et formations afférentes à $(\varepsilon)$. Seulement ces lettres seront surmontées d'un petit trait horizontal.

**20.** On aura

$$\sum_\alpha \varepsilon_\alpha x_\alpha = \sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha \bar{x}_\alpha \qquad \text{et} \qquad x = \mathrm{B}'^{-1}[\bar{x}],$$

$$x_\gamma = \sum_\gamma \mathrm{B}_{\gamma\beta} \bar{x}_\beta, \qquad \bar{x} = \mathrm{B}'[x],$$

$$\sum_\alpha \varepsilon_\alpha \mathrm{X}_\alpha = \sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha \bar{\mathrm{X}}_\alpha,$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{B}'^{-1}[\bar{\mathrm{X}}], \qquad \bar{\mathrm{X}} = \mathrm{B}'[\mathrm{X}],$$

$$\bar{\mathrm{X}}_\alpha = \sum_\delta b_{\delta\alpha} \mathrm{X}_\delta.$$

**21.** Calculons la matrice $\bar{\mathrm{J}} = [\bar{\mathrm{X}}_{\alpha\beta}]$,

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{X}}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{\mathrm{X}}_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\beta} \sum_\delta b_{\delta\alpha} \mathrm{X}_\delta \\ &= \sum_{\gamma\delta} b_{\delta\alpha} \frac{\partial \mathrm{X}_\delta}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\gamma}{\partial \bar{x}_\beta} = \sum_{\gamma\delta} b_{\delta\alpha} \mathrm{X}_{\delta\gamma} \mathrm{B}_{\gamma\beta},\end{aligned}$$

sous le bénéfice des formules du n° **20**. Autrement dit :

$$\bar{\mathrm{X}}_{\alpha\beta} = [\mathrm{B}'\mathrm{J}\mathrm{B}'^{-1}]_{\alpha\beta},$$
$$\bar{\mathrm{J}} = \mathrm{B}'\mathrm{J}\mathrm{B}'^{-1}.$$

**22.** D'autre part (**19** et **4**), on a

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_\lambda \bar{\varepsilon}_\beta \bar{\varepsilon}_\mu = \sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha [\bar{\mathrm{K}}_{\lambda\mu}]_{\alpha\beta} &= \Big(\sum_g \mathrm{B}_{g\lambda} \varepsilon_g\Big)\Big(\sum_h \mathrm{B}_{h\beta} \varepsilon_h\Big)\Big(\sum_k \mathrm{B}_{k\mu} \varepsilon_k\Big) \\ &= \sum_{ghk} \mathrm{B}_{g\lambda} \mathrm{B}_{h\beta} \mathrm{B}_{k\mu} \varepsilon_g \varepsilon_h \varepsilon_k \\ &= \sum_{ghkl} \mathrm{B}_{g\lambda} \mathrm{B}_{h\beta} \mathrm{B}_{k\mu} \varepsilon_l [\mathrm{K}_{gk}]_{lh} \\ &= \sum_{\alpha ghkl} \bar{\varepsilon}_\alpha \mathrm{B}_{g\lambda} \mathrm{B}_{h\beta} \mathrm{B}_{k\mu} b_{l\alpha} [\mathrm{K}_{gk}]_{lh}\end{aligned}$$

$$(\alpha, \beta, \lambda, \mu, g, h, k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

grâce aux formules du n° **19**.

Identifiant les coefficients de $\bar{\varepsilon}_\alpha$ dans les deux expressions du produit $\bar{\varepsilon}_\lambda \bar{\varepsilon}_\beta \bar{\varepsilon}_\mu$, on a

$$[\overline{K}_{\lambda\mu}]_{\alpha\beta} = \sum_{gk} B_{g\lambda} B_{k\mu} \sum_{hl} b_{l\alpha} [K_{gk}]_{lh} B_{h\beta} = \sum_{gk} B_{gl} B_{k\mu} [B' K_{gh} B'^{-1}]_{\alpha\beta},$$

et, finalement,

$$\overline{K}_{\lambda\mu} = B' \Big( \sum_{gk} B_{g\lambda} B_{k\mu} K_{gk} \Big) B'^{-1}.$$

**23.** Ensuite, sous le bénéfice de cette formule et de celle du n° **21** et du n° **4**,

$$\bar{J} = \sum_{\lambda\mu} \bar{x}_{\lambda\mu}(\bar{x}) \overline{K}_{\lambda\mu} = B' \Big( \sum_{\lambda\mu gk} B_{g\lambda} B_{k\mu} \bar{x}_{\lambda\mu} K_{gk} \Big) B'^{-1}$$
$$= B' J B'^{-1} = B' \Big( \sum_{gk} x_{gk} K_{gk} \Big) B'^{-1}.$$

Puis

$$0 = \sum_{gk} K_{gk} \Big( x_{gk} - \sum_{\lambda\mu} B_{g\lambda} B_{k\mu} \bar{x}_{\lambda\mu} \Big) = \sum_{\lambda\mu} K_{gk} \eta_{gk} = K(\eta)$$

avec les notations du n° **7**, et en posant

$$\eta_{gk} = x_{gk} - \sum_{\lambda\mu} B_{g\lambda} B_{k\mu} \bar{x}_{\lambda\mu}.$$

La matrice $n$ — aire $K(\eta)$ ne peut s'évanouir que si tous les $\eta_{gk}$ sont nuls. Donc

$$x_{gk} = \sum_{\lambda\mu} \bar{x}_{\lambda\mu} B_{g\lambda} B_{k\mu} = [B'^{-1} \overline{W} B^{-1}]_{gk},$$
$$W = B'^{-1} \overline{W}(\bar{x}) B^{-1},$$
$$\overline{W}(\bar{x}) = B' W(x) B. \tag{15}$$

**24.** D'après les théories bien connues de Weierstrass et en vertu

de la formule (15), les *Elementarteiler* du faisceau

$$\rho W + W'$$

de matrices $n$ — aires sont des covariants.

Autrement dit, décomposons les déterminants

$$|\rho W(x) + W'(x)| \quad \text{et} \quad |\rho \overline{W}(\bar{x}) + \overline{W}'(\bar{x})|$$

considérés comme polynomes en $\rho$ en leurs *Elementarteiler*,

$$|\rho W(x) + W'(x)| = |W(x)|^{\varpi} \Pi[\rho - a(x)]^m,$$
$$|\rho \overline{W}(\bar{x}) + \overline{W}'(\bar{x})| = |\overline{W}(\bar{x})|^{\bar{\varpi}} \Pi[\rho - \bar{a}(\bar{x})]^{\bar{m}}.$$

Il viendra

$$|\overline{W}(\bar{x})| = |W(x)|; \qquad \bar{a}(\bar{x}) = a(x); \qquad \bar{\varpi} = \varpi; \qquad \bar{m} = m.$$

Les exposants $m$ et $\varpi$, les fonctions $|W|$ et a ont leurs valeurs indépendantes du choix des fondamentaux $\varepsilon$ et sont invariants vis-à-vis de toute transformation par la substitution B.

En particulier et comme il fallait s'y attendre, *le rang de* W, *indice de monogénéité pour la fonction* X (**17**) *de la variable hypercomplexe* $x$, *ne dépend pas du choix des nombres fondamentaux dans le groupe* ($\varepsilon$).

**25**. Les relations étroites qui existent entre la matrice W et la matrice jacobienne J s'expliquent, puisque les éléments $X_{\alpha\beta}$ de J sont les coordonnées spéciales dans le groupe ($\varepsilon\varepsilon$) de la quantité $w$ qui a déjà, dans ($\varepsilon\varepsilon$), les éléments de W pour coordonnées (**15**).

## CHAPITRE IV.

### CONSTRUCTION DE LA MATRICE $W(x)$.

**26**. Reprenant les coordonnées spéciales, je vais chercher comment la matrice $n$ — aire W se déduit de la jacobienne J des fonctions X par rapport aux variables $x$.

**27.** Prenons $r^4 = n^2$ quantités

$$w_{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r).$$

Disposons-les en éléments d'une matrice $n$ — aire W en plaçant :

Dans une même ligne, les $w$ où la combinaison $\alpha\beta$ d'indices est la même;

Dans une même colonne, les $w$ où la combinaison $\gamma\delta$ est la même.

On range, d'ailleurs, les $\alpha\beta$ ou les $\gamma\delta$ dans l'ordre suivant :

$$11, \quad 12, \quad \ldots, \quad 1r; \quad 21, \quad 22, \quad \ldots, \quad 2r; \quad \ldots; \quad r1, r2, \ldots, rr.$$

La matrice W est ainsi répartie en $r$ bandes horizontales, numérotées $1, 2, \ldots, \alpha, \ldots, r$, comprenant chacune les $r$ lignes $\alpha\beta$, où le premier indice est $\alpha$.

Il y a de même, dans W, $r$ bandes verticales, numérotées $1, 2, \ldots, \gamma, \ldots, r$, comprenant chacune les $r$ colonnes $\gamma\delta$, où le premier indice est $\gamma$.

Les intersections des bandes horizontales et verticales, d'indices $\alpha$ et $\gamma$ respectivement, décomposent W en $r^2 = n$ matrices partielles $r$ — aires qu'on peut appeler $\theta_{\alpha\gamma}$.

On posera

$$W = \{\theta_{\alpha\gamma}\} \qquad w_{\alpha\beta\gamma\delta} = [\theta_{\alpha\gamma}]_{\beta\delta}$$

pour indiquer que, dans la matrice $r$ — aire, $\theta_{\alpha\gamma}$, $w_{\alpha\delta\gamma\delta}$ est l'élément de la $\beta^{\text{ième}}$ ligne et de la $\delta^{\text{ième}}$ colonne.

Les matrices $\theta_{\alpha\gamma}$, assimilées à des lettres à deux indices, donnent une matrice $r$ — aire

$$\Theta = [\theta_{\alpha\gamma}],$$

*canevas* de la matrice W.

**28.** Transposons le canevas. On aura la matrice $n$ — aire

$$W_1 = \{\theta_{\gamma\alpha}\}.$$

Si je transpose chaque matrice partielle, j'obtiens la matrice $n$ — aire

$$W_2 = \{\theta'_{\alpha\gamma}\}.$$

La transposition de la matrice $n$ — aire W elle-même est le produit

des transpositions précédentes. On a

$$W' = \{ \theta'_{\gamma\alpha} \}.$$

On vérifie sans peine que

$$W = (W_1)_1 = (W_2)_2; \qquad W'_1 = W_2; \qquad W'_2 = W_1,$$
$$W' = (W_1)_2 = (W_2)_1; \qquad (W_1)' = W_2; \qquad (W_2)' = W_1.$$

**29.** Soient deux matrices $n$ — aires, telles que W, A et B, décomposées en matrices partielles $r$ — aires,

$$A = \{ g_{\alpha\delta} \}, \qquad B = \{ h_{\alpha\delta} \},$$

et les substitutions $n$ — aires,

$$\begin{aligned} A &= \left| x_{\alpha\beta} \quad \sum_{\gamma\delta} [g_{\alpha\gamma}]_{\beta\delta} x_{\gamma\delta} \right| \\ B &= \left| x_{\gamma\delta} \quad \sum_{\lambda\mu} [h_{\gamma\lambda}]_{\delta\mu} x_{\lambda\mu} \right| \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, r),$$

$$AB = \left| x_{\alpha\beta} \quad \sum_{\lambda\mu} x_{\lambda\mu} [K_{\alpha\lambda}]_{\beta\mu} \right|,$$

$$[K_{\alpha\lambda}]_{\beta\mu} = \sum_{\gamma\delta} [g_{\alpha\gamma}]_{\beta\delta} [h_{\gamma\lambda}]_{\delta\mu} = \sum_{\gamma} [g_{\alpha\gamma} h_{\gamma\lambda}]_{\beta\mu},$$

$$K_{\alpha\lambda} = \sum_{\gamma} g_{\alpha\gamma} h_{\gamma\lambda}.$$

On voit que le canevas du produit AB est constitué par les matrices $r$ — aires,

$$K_{\alpha\lambda} = \sum_{\gamma} g_{\alpha\gamma} h_{\gamma\lambda}; \qquad AB = \{ K_{\alpha\lambda} \};$$

$K_{\alpha\lambda}$ est symboliquement l'élément de ligne $\alpha$ et de colonne $\lambda$ dans la matrice $r$ — aire $K = gh$, produit des deux matrices $r$ — aires

$$g = [g_{\alpha\gamma}], \qquad h = [h_{\gamma\lambda}].$$

On peut donc dire que symboliquement *le canevas d'un produit est le produit des canevas des facteurs.*

**30**. Reprenons la fonction

$$X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta},$$

la variable hypercomplexe

$$x = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma} x_{\beta\gamma},$$

et posons [**18**, form. (10)],

$$w_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}}, \qquad z_{\gamma\beta} = x_{\beta\gamma}.$$

Si nous rangeons les $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ suivant les lignes $\alpha\beta$ et les colonnes $\gamma\delta$, nous obtenons la matrice W. Si nous rangeons les $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ suivant les lignes $\alpha\delta$ et les colonnes $\gamma\beta$, nous obtenons la matrice H, jacobienne des X par rapport aux variables $z$.

On passe donc de W à H, ou réciproquement, en permutant dans les $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ les indices $\beta$ et $\delta$, tandis que les indices $\alpha$ et $\gamma$ restent fixes.

Considérons les canevas (**29**)

$$W = \{ \theta_{\alpha\gamma} \}, \qquad H = \{ \upsilon_{\alpha\gamma} \}.$$

On a

$$w_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} = [\theta_{\alpha\gamma}]_{\beta\delta} = [\upsilon_{\alpha\gamma}]_{\delta\beta},$$

c'est-à-dire

$$\upsilon_{\alpha\gamma} = \theta'_{\alpha\gamma}.$$

Nous reportant au n° **27**, nous dirons que $H = W_2$ *ou* $W = H_2$, ou bien que, *pour passer de* H *à* W, *ou réciproquement, il suffit de transposer des matrices* $r$ — aires *partielles.*

**31**. Comment se modifie la matrice W, lorsqu'on effectue un changement des variables scalaires?

Nommons, pour abréger le langage, $J\left(\frac{y}{x}\right)$ la matrice jacobienne des $n$ fonctions $y$ par rapport aux $n$ variables $x$, de façon que

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \left| J\left(\frac{y}{x}\right) \right|.$$

On écrira donc

$$\mathrm{J} = \mathrm{J}\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ x \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H} = \mathrm{J}\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ z \end{pmatrix}.$$

Posons $z_\alpha = f_\alpha(t_1, \ldots, t_n)$. Il viendra

$$\mathrm{J}\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ t \end{pmatrix} = \mathrm{J}\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ z \end{pmatrix} \mathrm{J}\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}.$$

Avec les variables $t$, la matrice W devient (**30**)

$$\left[\mathrm{J}\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ t \end{pmatrix}\right]_2 = \left[\mathrm{J}\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ z \end{pmatrix} \mathrm{J}\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\right]_2.$$

**32.** Traitons la même question en coordonnées générales.

On a (**4** et **7**)

$$\mathrm{J} = \mathrm{J}\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ x \end{pmatrix} = \mathrm{K}(u) = \sum_{\lambda\mu} u_{\lambda\mu} \mathrm{K}_{\lambda\mu}.$$

Pour changer de variables scalaires, posons

$$x_\alpha = f_\alpha(y_1, \ldots, y_n).$$

On aura

$$\mathrm{J}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{K}(v) = \sum_{\lambda\mu} v_{\lambda\mu} \mathrm{K}_{\lambda\mu},$$

$$\mathrm{J}\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{J}\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ x \end{pmatrix} \mathrm{J}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{K}(u)\,\mathrm{K}(v) = \mathrm{K}(w).$$

Par conséquent on peut énoncer le théorème suivant, en nous reportant aux considérations du Chapitre II.

Théorème. — *Considérons la fonction* X *de la variable hypercomplexe* $x$ *et la fonction* $x$ *de la variable hypercomplexe* $y$, *enfin la fonction* X *de la variable hypercomplexe* $y$. *Nommons respectivement* $u$, $v$, $w$ *les quantités hypercomplexes du groupe* ($\varepsilon\varepsilon$) *du Chapitre II qui correspondent respectivement à la matrice* W :

*Pour la fonction* X *de* $x$,

*Pour la fonction* $x$ *de* $y$,

*Pour la fonction* X *de* $y$.

*La grandeur $w$ sera le produit dans le groupe* ($\varepsilon\varepsilon$) *des deux grandeurs $u$ et $v$.*

Voilà comment s'introduit utilement le groupe ($\varepsilon\varepsilon$) dans la présente théorie des fonctions d'une variable hypercomplexe.

**33.** Démontrons maintenant quelques théorèmes utiles pour la suite.

## CHAPITRE V.

### PROPOSITIONS DIVERSES.

**34.** Reprenons, avec nos notations ordinaires, la jacobienne J des fonctions $X_\alpha$ par rapport aux variables $x_\beta$, dans

$$X = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha X_\alpha(x_1, \ldots, x_n).$$

On a (7)

$$J = K(w) = K(W) = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} S(\varepsilon_\lambda) T(\varepsilon_\mu).$$

Considérons, avec M. Frobenius, la matrice symétrique $P = R(\sigma)$, $\sum_\alpha \sigma_\alpha x_\alpha$ étant la *trace* de $|S(x)|$ (voir *Préliminaires*). On aura [Frobenius, form. (11), § 1, en faisant $\xi = \sigma$], pour tout $x$,

$$PS(x) = T'(x) P.$$

De là

$$PJ = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} PS(\varepsilon_\lambda) T(\varepsilon_\mu) = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} T'(\varepsilon_\lambda) PT(\varepsilon_\mu).$$

Puis

$$(PJ)' = J'P = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} T'(\varepsilon_\mu) PT(\varepsilon_\lambda)$$
$$= P \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} S(\varepsilon_\mu) T(\varepsilon_\lambda) = PK(W').$$

Finalement, $\rho$ étant un paramètre variable,

$$(16) \qquad \begin{cases} J = K(W), \qquad P^{-1}J'P = K(W'), \\ \rho J + P^{-1}J'P = K(\rho W + W'). \end{cases}$$

En particulier, faisant $\rho = -1$,

$$P^{-1}J'P - J = K(W' - W).$$

Chacune des relations

$$W' = W, \qquad P^{-1}J'P = J$$

entraîne l'autre.

De la seconde on tire

$$(PJ)' = PJ, \qquad PJ = \text{symétrique}.$$

Or $P = |p_{\alpha\beta}|$; PJ est la jacobienne des $n$ expressions $Y_\alpha = \sum_\delta p_{\alpha\delta} X_\delta$ par rapport aux $x_\beta$. La symétrie de la jacobienne indique que l'expression

$$\sum_\alpha Y_\alpha \, dx_\alpha = \sum_{\alpha\delta} p_{\alpha\delta} X_\delta \, dx_\alpha$$
$$= \sum_\delta X_\delta \, d \sum_\alpha p_{\delta\alpha} x_\alpha = \sum_\delta X_\delta \, dt_\delta$$

est une différentielle exacte et

$$X_\delta = \frac{\partial \mathfrak{X}(t_1, \ldots, t_n)}{\partial t_\delta}.$$

Ainsi : *pour que la matrice* W *soit symétrique, il faut et il suffit que l'expression*

$$\sum_\alpha X_\alpha(t) \, dt_\alpha, \qquad t_\alpha = \sum_\beta p_{\alpha\beta} x_\beta$$

*soit une différentielle exacte.*

**55.** On a vu, au Chapitre I, que, si, ($\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n$),

$$dX = \sum_i u_i\, dx\, v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

$$u_i = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda u_{i\lambda}, \qquad v_i = \sum_\mu \varepsilon_\mu v_{i\mu},$$

on a

$$w_{\lambda\mu} = \sum_i u_{i\lambda} v_{i\mu}.$$

Transposer la matrice W, c'est donc transposer les grandeurs $u_i$ et $v_i$.

**56.** Je vais étudier maintenant le rang N de la matrice W, c'est-à-dire l'indice de monogénéité (**17**) de la fonction X.

Soit

$$dX = \sum_i u_i\, dx\, v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Multiplions X, devant ou derrière, par une constante hypercomplexe quelconque M. On aura encore

$$d(MX) = M\, dX = \sum_i M u_i\, dx\, v_i,$$

$$d(XM) = dX\, M = \sum_i u_i\, dx\, v_i M,$$

et *la multiplication, devant ou derrière, par une constante quelconque ne peut augmenter l'indice de monogénéité.*

Employons les coordonnées spéciales et prenons la fonction ($n = r^2$),

$$X = \sum_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}\, \varepsilon_{\alpha\delta} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r)$$

avec l'indice N de monogénéité. La fonction

$$\mathfrak{X} = \varepsilon_{\lambda\mu} X \varepsilon_{\rho\sigma} = \sum_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}\, \varepsilon_{\lambda\mu}\, \varepsilon_{\alpha\delta}\, \varepsilon_{\rho\sigma}$$

a l'indice de monogénéité $\mathfrak{N} \leq N$. Mais

$$\varepsilon_{\lambda\mu}\,\varepsilon_{\alpha\delta} = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \mu \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\lambda\mu}\,\varepsilon_{\mu\delta} = \varepsilon_{\lambda\delta},$$

$$\varepsilon_{\lambda\delta}\,\varepsilon_{\rho\sigma} = 0 \quad \text{pour} \quad \delta \neq \rho \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\lambda\rho}\,\varepsilon_{\rho\sigma} = \varepsilon_{\lambda\sigma};$$

$$\mathfrak{X} = \varepsilon_{\lambda\sigma}\,X_{\mu\rho}.$$

Donc *la fonction hypercomplexe obtenue en multipliant* $X_{\alpha\delta}$ *par un fondamental quelconque a un indice de monogénéité qui ne dépasse pas* N.

**57.** Soit, pour fixer les idées, $\mathfrak{X} = \varepsilon_{11}X_{11}$. Dans la jacobienne H, du n° **50**, toutes les lignes sont composées de zéros, sauf la première. Si l'on pose, pour introduire le canevas (**27**),

$$H = |\theta_{\alpha\gamma}| \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, r),$$

il viendra $\theta_{\alpha\gamma} = 0$ pour $\alpha \neq 1$. Dans la matrice $r$ — aire $\theta_{1\gamma}$, la première ligne contient les $r$ dérivées

$$\frac{\partial X_{11}}{\partial z_{\gamma\delta}} \qquad (\delta = 1, 2, \ldots, r);$$

les $r - 1$ autres lignes sont formées de zéros. Dans la matrice W, obtenue en transposant les matrices partielles $r$ — aires de H,

$$W = |\theta'_{\alpha\gamma}|,$$

on a

$$\theta'_{\alpha\gamma} = 0 \qquad \text{pour} \qquad \alpha \neq 1.$$

Dans $\theta'_{1\gamma}$, toutes les colonnes, sauf la première, sont composées de zéros. W contient le mineur $r$ — aire

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_{11}}{\partial z_{11}} & \cdots & \dfrac{\partial X_{11}}{\partial z_{1r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial X_{11}}{\partial z_{r1}} & \cdots & \dfrac{\partial X_{11}}{\partial z_{rr}} \end{vmatrix} = |U(X_{11})|.$$

Ainsi *toute fonction* $X_{\alpha\delta}$ *doit être choisie parmi les solutions* $\Omega$ *du*

*système d'équations aux dérivées partielles obtenu en écrivant que la matrice* $U(\Omega)$ *a le rang* N *au plus.*

Cette remarque n'a d'intérêt que si $N < r$.

**58.** Plus généralement, les $n$ fonctions $X_{\alpha\delta}$, pour une fonction X à indice donné N de monogénéité, doivent satisfaire à un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, obtenu en annulant, dans la matrice W, tous les mineurs $(N+1)$ — aires.

C'est la méthode qu'on appliquera au Chapitre suivant pour le cas $N = 1$.

Je terminerai le présent Chapitre en résolvant deux problèmes auxiliaires, d'ailleurs assez élémentaires, mais utiles par la suite. Ils sont relatifs tous deux à la matrice $r$ — aire

$$K = [K_{\alpha\beta}], \qquad K_{\alpha\beta} = \text{const.} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r)$$

de rang $\mathfrak{R}$.

**59.** Faisons d'abord $\mathfrak{R} = 1$, $K_{\alpha\beta} = g_\alpha h_\beta$. E étant la $r$ — aire unité, considérons le déterminant caractéristique $\Delta = |\rho E - K|$. Comme $\mathfrak{R} = 1$, $\rho$ divise $\Delta$, ainsi que les premiers, seconds, ... $(r-l)$ — ièmes mineurs, déterminants $l$ — aires pour $l = 2, 3, \ldots, r$. $\Delta$ comporte donc $r-1$ *Elementarteiler* divisibles par $\rho$ et

$$\Delta = \rho^{m_0} \ldots \rho^{m_{r-2}} f(\rho),$$

$m_0 \geqq m_1 \geqq \ldots \geqq m_{r-2}$, $f(\rho)$ ayant le degré $\sigma$,

$$r = \sigma + m_0 + \ldots + m_{r-2}.$$

Posons $m_0 = 1 + \delta_0$, ..., les $\delta$ étant positifs ou nuls. Il viendra

$$r = \sigma + r - 1 + \delta_0 + \ldots + \delta_{r-2},$$

$$\delta_0 + \ldots + \delta_{r-2} = 1 - \sigma.$$

Si

$$\sigma = 1, \qquad \delta_0 = \ldots = \delta_{r-2} = 0.$$

Tous les *Elementarteiler* sont linéaires et la matrice K est canoni-

sable. Transformant K par une $r$ — aire convenable, on peut faire $K_{11} \neq 0$ tous les autres $K_{\alpha\beta} = 0$.

Si

$$\sigma = 0, \qquad \delta_0 = 1, \qquad \delta_1 = \ldots = \delta_{r-2} = 0,$$
$$\Delta = \rho^2 \rho \ldots \rho,$$

K est semblable à une matrice où l'élément de la première ligne et de la deuxième colonne est égal à 1 et seul différent de zéro. Pour toutes explications, je renverrai, par exemple, à la première Partie et au Chapitre I de mon Mémoire : *Sur les formes mixtes* (Gauthier-Villars, 1905). Bref, on pourra supposer encore

$$K_{12} = g_1 h_2 = 1, \qquad K_{\alpha\beta} = 0.$$

Ces remarques seront utiles plus loin (**58**).

**40.** Faisons le rang de la matrice K, $\mathfrak{K} > 1$, et envisageons les $n$ fonctions

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r),$$
$$\zeta_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta} K_{\alpha\beta} x_{\beta\gamma},$$

où les $n = r^2$ variables $x$ sont indépendantes.

Les $\zeta_{\alpha\gamma}$ sont liées par $r(r - \mathfrak{K})$ relations distinctes

$$(\text{M}) \qquad \sum_{\alpha} m_{\rho\alpha} \zeta_{\alpha\gamma} = 0 \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, r; \ \rho = 1, 2, \ldots, r - \mathfrak{K})$$

et seulement par celles-là.

Dans le Tableau à $r - \mathfrak{K}$ lignes et $r$ colonnes

$$\begin{matrix} m_{11} \ldots m_{1r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_{r-\mathfrak{K},1} \ldots m_{r-\mathfrak{K},r}, \end{matrix}$$

un au moins des déterminants $(r - \mathfrak{K})$ — aires, par exemple celui des $r - \mathfrak{K}$ dernières colonnes, est différent de zéro.

On peut résoudre (M) par rapport aux $r - \mathfrak{K}$ quantités $\zeta_{\pi\gamma}$ (où $\pi = \mathfrak{K}+1, \mathfrak{K}+2, \ldots, r$), qui se trouveront exprimées à l'aide des $\zeta_{1\gamma}, \ldots, \zeta_{\mathfrak{K}\gamma}$.

En résumé, *les* $r\mathfrak{K}$ *quantités*

$$\zeta_{\sigma\gamma}, \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \mathfrak{K};\ \gamma = 1, 2, \ldots, r)$$

*peuvent varier* librement.

Supposons maintenant que les $r$ expressions, fonctions des $\zeta_{\alpha\gamma}$,

$$\mathfrak{P}_\alpha(\zeta_{\alpha 1}, \ldots, \zeta_{\alpha\gamma}, \ldots, \zeta_{\alpha r}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r)$$

aient une valeur commune $\Omega$. Je dis que $\Omega$ *est une constante, les* $\mathfrak{P}_\sigma$ *ne dépendant plus des* $\zeta$.

En effet, si $\mathfrak{K} > 1$, on aura en particulier

$$\mathfrak{P}_1(\zeta_{11}, \ldots, \zeta_{1r}) = \mathfrak{P}_2(\zeta_{21}, \ldots, \zeta_{2r}).$$

Comme il ne peut exister entre les $\zeta_{\sigma\gamma}$ aucune relation, il faut que chacune des expressions $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ soit indépendante des $\zeta$ et séparément égale à une même constante $\Omega$. Pour le même motif, la relation $\mathfrak{P}_\sigma = \Omega$ entraîne l'indépendance des $\mathfrak{P}_\sigma$ par rapport aux $\zeta$. Quant aux relations

$$\mathfrak{P}_\alpha = \Omega \qquad (\alpha = \mathfrak{K}+1, \ldots, r),$$

elles doivent être une conséquence du système (M).

Ces remarques seront utiles plus loin (**48**).

**41**. Prenons les coordonnées

$$x_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r;\ n = r^2)$$

et la matrice $r$-aire afférente (*Préliminaires*, **9**)

$$(x) = |x_{\alpha\beta}|,$$

ainsi qu'une constante hypercomplexe $g$, avec sa matrice $r$-aire $(g)$. Remplacer la matrice $(x)$ par la matrice

$$(g)^{-1}(x)(g),$$

c'est effectuer, sur les $n$ coordonnées de $x$ dans le groupe ($\varepsilon$), une certaine substitution linéaire $n$ — aire B, de déterminant $\neq 0$, c'est-à-dire effectuer dans ($\varepsilon$) un changement de fondamentaux. Cette question a été discutée aux n$^{os}$ **19** à **24**. La jacobienne $J = J\binom{X}{x}$ devient (**21**, *in fine*)

$$\bar{J} = B'JB'^{-1}.$$

Or on peut choisir la $r$ — aire ($g$) de façon que dans $\bar{J}$ aucun élément ne soit nul. D'autre part, l'intervention de la $r$ — aire ($g$) n'a pas pour effet de changer dans ($\varepsilon$) la formule de multiplication et *les coordonnées restent spéciales*.

Tout cela revient à dire qu'il est licite de supposer différente de zéro *chacune* des $n^2$ dérivées partielles, éléments de la jacobienne $J = \binom{X}{x}$ ou de la jacobienne $H = \binom{X}{z}$, $x_{\beta\gamma} = z_{\gamma\beta}$.

C'est ce que nous ferons au cours de la discussion qui remplit le Chapitre suivant.

**42.** On est maintenant à même d'aborder la construction d'une fonction X, ayant l'indice *un* de monogénéité.

## CHAPITRE VI.

### FONCTIONS D'UNE VARIABLE HYPERCOMPLEXE AVEC L'INDICE *UN* DE MONOGÉNÉITÉ.

**43.** Je vais construire les fonctions

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \ldots = 1, 2, \ldots, r;\ n = r^2),$$

$$X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}(x_{11}, \ldots, x_{rr})$$

de la variable hypercomplexe

$$x = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma} x_{\beta\gamma}$$

ou

$$z = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma} z_{\gamma\beta}, \qquad x_{\beta\gamma} = z_{\gamma\beta},$$

de façon que l'indice N de monogénéité soit *un*; alors

(17) $$dX = u\,dx v.$$

Reprenons les jacobiennes $J = J\left(\frac{X}{x}\right)$ et $H = J\left(\frac{X}{z}\right)$ et leurs canevas (**27**). Il viendra (**30**)

$$H = |\upsilon_{\alpha\gamma}|, \qquad W = H_z = |\upsilon'_{\alpha\gamma}|$$

avec

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} = [\upsilon_{\alpha\gamma}]_{\delta\beta} = [\upsilon'_{\alpha\gamma}]_{\beta\delta}.$$

**44.** La $n$ — aire W a, par hypothèse, le rang *un*; la $r$ — aire $\upsilon_{\alpha\gamma}$ ne peut, puisque $r \geqq 2$, avoir pour rang que *un* ou zéro. La seconde supposition est inadmissible, puisque aucune des dérivées partielles n'est zéro (**41**). D'autre part, $\upsilon_{\alpha\gamma}$ est la jacobienne des $r$ fonctions

$$X_{\alpha 1}, \quad \ldots \quad X_{\alpha\delta}, \quad \ldots, \quad X_{\alpha r},$$

par rapport aux $r$ variables

$$z_{\gamma 1}, \quad \ldots, \quad x_{\gamma\beta}, \quad \ldots, \quad z_{\gamma r},$$

$$\upsilon_{\alpha\gamma} = J\begin{pmatrix} X_{\alpha 1} & \ldots & X_{\alpha r} \\ z_{\gamma 1} & \ldots & z_{\gamma r} \end{pmatrix}.$$

Le rang étant *un*, les $X_{\alpha\delta}$ ne dépendent pas des $z_{\gamma\beta}$, mais d'une fonction unique

(18) $$\varpi_{\alpha\gamma}(z_{\gamma 1}, \ldots, z_{\gamma\beta}, \ldots, z_{\gamma r}),$$

indépendante de l'indice $\delta$.

Considérant de même les matrices $\upsilon_{\alpha 1}, \ldots, \upsilon_{\alpha r}$, on voit que

(19) $$X_{\alpha\delta} = X_{\alpha\delta}(\varpi_{\alpha 1}, \varpi_{\alpha 2}, \ldots, \varpi_{\alpha\gamma}, \ldots, \varpi_{\alpha r}).$$

45. Formons $\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}}$. $X_{\alpha\delta}$ ne contient les $z$ que par l'intermédiaire des $\varpi$.

$z_{\gamma\beta}$ ne figure que dans les $\varpi$ où le second indice est $\gamma$. $X_{\alpha\delta}$ ne contient que les $\varpi$ où le premier indice est $\alpha$. Donc

$$(20) \qquad \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \varpi_{\alpha\gamma}} \frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}}.$$

D'autre part, la formule (17) donne

$$dX = \sum_{\alpha\delta\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\delta} \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} dz_{\gamma\beta} = u\,dx\,v = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta}\, u_{\alpha\beta}\, dz_{\gamma\beta}\, v_{\gamma\delta},$$

c'est-à-dire

$$(21) \qquad \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} = u_{\alpha\beta} v_{\gamma\delta} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \varpi_{\alpha\gamma}} \frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}};$$

aucun des $u_{\alpha\beta}$ ni des $v_{\gamma\delta}$ n'est zéro, puisque aucune des dérivées partielles $\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}}$ n'est nulle.

De (21) on tire, $\beta_0$ étant un indice quelconque,

$$(22) \qquad \frac{u_{\alpha\beta}}{u_{\alpha\beta_0}} = \frac{\dfrac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}}}{\dfrac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta_0}}}.$$

Le second membre de la formule (22) est une fonction des $r$ variables

$$z_{\gamma 1}, \quad \dots, \quad z_{\gamma r}$$

seulement, tandis que le premier membre est indépendant de l'indice $\gamma$. Les $z$ sont variables indépendantes et il ne peut exister entre elles aucune relation. Donc, ni le premier, ni le second membre de (22) ne dépendent des $z$; ils sont égaux à une même constante $K_{\alpha\beta}$, indépendante de l'indice $\gamma$.

Si l'on pose

$$\theta_\alpha = u_{\alpha\beta_0}, \qquad \varphi_{\alpha\gamma} = \frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial \alpha_{\gamma\beta_0}},$$

l'indice $\beta_0$ étant fixe, on pourra écrire

(23) $$u_{\alpha\beta} = \theta_\alpha K_{\alpha\beta}$$

et

(24) $$\frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \varphi_{\alpha\gamma} K_{\alpha\beta}.$$

Mais $\varpi_{\alpha\gamma}$ ne contient que les $r$ variables $z_{\gamma 1}, \ldots, z_{\gamma r}$. Donc

$$\sum_\beta \frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} dz_{\gamma\beta} = d\varpi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}\, d \sum_\beta K_{\alpha\beta}\, z_{\gamma\beta}.$$

**46.** Posons

(25) $$\zeta_{\alpha\gamma} = \sum_\beta K_{\alpha\beta}\, z_{\gamma\beta} = \sum_\beta K_{\alpha\beta}\, x_{\beta\gamma}.$$

Il viendra

$$d\varpi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}\, d\zeta_{\alpha\gamma};$$

$\varpi_{\alpha\gamma}$ est une fonction de la seule quantité $\zeta_{\alpha\gamma}$,

$$\varpi_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\gamma}(\zeta_{\alpha\gamma}).$$

Mais, dans la formule (19), il est indifférent d'écrire

$$X_{\alpha\delta} = X_{\alpha\delta}[\ldots, f_{\alpha\gamma}(\zeta_{\alpha\gamma}), \ldots],$$

ou bien, $X_{\alpha\delta}$ étant une fonction arbitraire,

$$X_{\alpha\delta} = X_{\alpha\delta}(\ldots, \zeta_{\alpha\gamma}, \ldots).$$

Cela revient à faire

$$\varphi_{\alpha\gamma} = 1, \qquad \varpi_{\alpha\gamma} = \zeta_{\alpha\gamma}, \qquad \frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \frac{\partial \zeta_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} = K_{\alpha\gamma}.$$

Combinant avec les formules (20), (21) et (25), il vient

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\alpha}} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} \frac{\partial \zeta_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} K_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}\, v_{\gamma\delta} = \theta_\alpha K_{\alpha\beta}\, v_{\gamma\delta},$$

(26) $$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} = \theta_\alpha\, v_{\gamma\delta}.$$

**47.** De (26) on tire

$$(27)\qquad v_{\gamma\delta} : v_{\gamma'\delta'} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} : \frac{\partial X_{\alpha\delta'}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma'}}.$$

Le second membre de (27) est, comme $X_{\alpha\delta}$ et $X_{\alpha\delta'}$, une fonction de $r$ variables

$$\zeta_{\alpha 1}, \quad \ldots, \quad \zeta_{\alpha\gamma}, \quad \ldots, \quad \zeta_{\alpha r},$$

tandis que le premier est indépendant de l'indice $\alpha$. Les $r$ expressions obtenues en faisant dans le second membre $\alpha = 1, 2, \ldots, r$ ont une valeur commune, qui ne dépend que de $\gamma$, $\gamma'$, $\delta$, $\delta'$. On est ainsi dans le cas traité au nº **40**; il faut distinguer les cas où le rang $\mathfrak{K}$ de la matrice $r$-aire $K = [K_{\alpha\beta}]$ est $> 1$ ou $= 1$.

**48.** Faisons d'abord $\mathfrak{K} > 1$. Alors (**40**) le premier membre de (27) ne dépend pas des variables $\zeta$ et, les indices $\gamma_0$ et $\delta_0$ étant fixés arbitrairement, avec $\omega = v_{\gamma_0\delta_0}$, on a

$$(28)\qquad v_{\gamma\delta} = \omega L_{\gamma\delta}, \qquad L_{\gamma\delta} = \text{const.};$$

$$(29)\qquad \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} = \omega\theta_\alpha L_{\gamma\delta},$$

sous le bénéfice de (26).

De (29) on tire

$$\frac{\partial^2 X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}\,\partial \zeta_{\alpha\gamma'}} = L_{\gamma\delta}\frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma'}}\omega\theta_\alpha = L_{\gamma'\delta}\frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}}\omega\theta_\alpha,$$

et, changeant $\delta$ en $\delta'$,

$$\frac{\partial^2 X_{\alpha\delta'}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}\,\partial \zeta_{\alpha\gamma'}} = L_{\gamma\delta'}\frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma'}}\omega\theta_\alpha = L_{\gamma'\delta'}\frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}}\omega\theta_\alpha.$$

De là, ou bien

$$(30)\qquad \frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}}\omega\theta_\alpha = 0,$$

ou bien

$$(31)\qquad \begin{vmatrix} L_{\gamma\delta} & L_{\gamma'\delta} \\ L_{\gamma\delta'} & L_{\gamma'\delta'} \end{vmatrix} = 0.$$

**49.** En vertu de (29), $\omega\theta_\alpha$ ne peut dépendre, comme $X_{\alpha\delta}$, que des variables

$$\zeta_{\alpha 1}, \quad \ldots, \quad \zeta_{\alpha\gamma}, \quad \ldots, \quad \zeta_{\alpha r}.$$

La formule (30) exprime donc que $\omega\theta_\alpha$ est une constante, ainsi que, en vertu de (29), l'expression $\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}}$. Il vient alors

$$dX_{\alpha\delta} = \sum_\gamma \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} d\zeta_{\alpha\gamma} = \omega\theta_\alpha \sum_\gamma L_{\gamma\delta}\, d\zeta_{\alpha\gamma} = \omega\theta_\alpha\, d \sum_\gamma L_{\gamma\delta}\, \zeta_{\alpha\gamma}.$$

Tenons compte de (25), on a

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} dX_{\alpha\delta} &= \omega\theta_\alpha \sum_{\gamma\beta} K_{\alpha\beta}\, dz_{\gamma\beta}\, L_{\gamma\delta} \\ &= \omega\theta_\alpha \sum_{\gamma\beta} K_{\alpha\beta}\, dx_{\beta\gamma}\, L_{\gamma\delta} = d(KxL)_{\alpha\delta}, \end{aligned} \right.$$

fondant la constante $\varpi\theta_\alpha$ dans la constante $K_{\alpha\beta}$. Quant à $(KxL)_{\alpha\delta}$, c'est la coordonnée d'indices $\alpha\delta$ pour la quantité hypercomplexe $KxL$, produit des trois quantités hypercomplexes $x$, $K$, de coordonnées $K_{\alpha\beta}$, et $L$, de coordonnées $L_{\gamma\delta}$.

De (32) on tire finalement

$$dX = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta}\, dX_{\alpha\delta} = d(KxL),$$

$$(33) \qquad X = KxL + M, \qquad M = \text{const.},$$

solution banale.

**50.** La condition (31) exprime que la matrice $L = [L_{\gamma\delta}]$ a le rang *un*. Alors [en vertu de (29)],

$$(34) \qquad L_{\gamma\delta} = l_\gamma m_\delta, \qquad \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} = \omega\theta_\alpha l_\gamma m_\delta \qquad (l_\gamma, m_\delta = \text{const.}),$$

$$dX_{\alpha\delta} = \sum_\gamma \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} d\zeta_{\alpha\gamma} = \omega\theta_\alpha \sum_\gamma m_\delta l_\gamma\, d\zeta_{\alpha\gamma} = \omega\, m_\delta \theta_\alpha\, dt_\alpha,$$

$$(35) \qquad t_\alpha = \sum_\gamma l_\gamma \zeta_{\alpha\gamma}.$$

Alors $m_\delta^{-1} X_{\alpha\delta}$ ne dépend que de $t_\alpha$.

$$(36) \qquad X_{\alpha\delta} = m_\delta \psi_\alpha(t_\alpha), \qquad \psi_\alpha = \text{fonction arbitraire.}$$

**51.** Ces conditions sont suffisantes, car

$$dX_{\alpha\delta} = m_\delta \psi'_\alpha(t_\alpha) \sum_\gamma l_\gamma d\zeta_{\alpha\gamma} = m_\delta \psi'_\alpha(t_\alpha) \sum_{\gamma\beta} K_{\alpha\beta} dx_{\beta\gamma} l_\gamma,$$

sous le bénéfice de (25). Il suffit de poser, eu égard à (21),

$$\left.\begin{array}{l} u_{\alpha\beta} = \psi'_\alpha(t_\alpha) K_{\alpha\beta} \mathfrak{P} \\ v_{\gamma\delta} = m_\delta l_\gamma \mathfrak{P}^{-1} \end{array}\right\} \quad \mathfrak{P} = \text{fonction quelconque des } x,$$

pour avoir

$$dX = u\, dx\, v.$$

L'indice de monogénéité est bien égal à *un*.

**52.** La discussion de l'éventualité $\mathfrak{K} > 1$ (**47**, *in fine*) est ainsi épuisée. L'éventualité a fourni la *solution banale* du n° **49** et la *première solution* donnée par le n° **50**.

Passons à l'éventualité $\mathfrak{K} = 1$.

**53.** Alors $K_{\alpha\beta} = g_\alpha h_\beta$, $g_\alpha$ et $h_\beta$ étant des constantes,

$$(37) \qquad \zeta_{\alpha\gamma} = \sum_\beta K_{\alpha\beta} z_{\gamma\beta} = \sum_\beta K_{\alpha\beta} x_{\beta\gamma} = g_\alpha q_\gamma,$$

$$(38) \qquad q_\gamma = \sum_\beta h_\beta z_{\gamma\beta} = \sum_\beta h_\beta x_{\beta\gamma}$$

et, eu égard à (19),

$$(39) \quad X_{\alpha\delta} = X_{\alpha\delta}(\zeta_{\alpha 1}, \zeta_{\alpha 2}, \ldots, \zeta_{\alpha\gamma}, \ldots, \zeta_{\alpha r}) = X_{\alpha\delta}(q_1, \ldots, q_\gamma, \ldots, q_r),$$

et les $r$ variables $q_\gamma$ sont indépendantes, puisqu'elles ne dépendent pas des mêmes $z$.

Alors [sous le bénéfice de (20) et (21)]

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial q_\gamma}\frac{\partial q_\gamma}{\partial z_{\gamma\beta}} = h_\beta \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial q_\gamma} = u_{\alpha\beta} v_{\gamma\delta} = \theta_\alpha K_{\alpha\beta} v_{\gamma\delta} = g_\alpha h_\beta \theta_\alpha v_{\gamma\delta},$$

$$(40) \qquad \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial q_\gamma} = g_\alpha \theta_\alpha v_{\gamma\delta}.$$

$$dX_{\alpha\delta} = \sum_\gamma \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial q_\gamma} dq_\gamma = g_\alpha \theta_\alpha \sum_\gamma v_{\gamma\delta}\, dq_\gamma,$$

$$\sum_\gamma v_{\gamma\delta}\, dq_\gamma = \frac{dX_{\alpha\delta}}{g_\alpha \theta_\alpha} = \frac{dX_{\alpha_0\delta}}{g_{\alpha_0}\theta_{\alpha_0}},$$

$$(41) \qquad \begin{cases} dX_{\alpha\delta} = \eta_\alpha\, d\Lambda_\delta, \\ \eta_\alpha = \dfrac{g_\alpha \theta_\alpha}{g_{\alpha_0}\theta_{\alpha_0}}, \qquad \Lambda_\delta = X_{\alpha_0\delta}. \end{cases}$$

De là

$$(42) \qquad X_{\alpha\delta} = \psi_{\alpha\delta}(\Lambda_\delta), \qquad \psi'_{\alpha\delta}(\Lambda_\delta) = \eta_\alpha.$$

**34.** Supposons d'abord $\eta_\alpha = \text{const.}$ et que, par suite, dans la formule (23), on ait

$$\theta_\alpha = e_\alpha \Theta \qquad (e_\alpha = \text{const.}).$$

L'on tire alors de (42)

$$(43) \qquad X_{\alpha\delta} = \eta_\alpha \Lambda_\delta + M_{\alpha\delta}, \qquad M_{\alpha\delta} = \text{const.}$$

Ce sera la *seconde solution*, car les conditions trouvées sont suffisantes. En effet, eu égard à (38),

$$dX_{\alpha\delta} = \eta_\alpha\, d\Lambda_\delta = \eta_\alpha \sum_\gamma \frac{\partial \Lambda_\delta}{\partial q_\gamma} dq_\gamma = \eta_\alpha \sum_{\beta\gamma} \frac{\partial \Lambda_\delta}{\partial q_\gamma} h_\beta\, dx_{\beta\gamma}.$$

Pour assurer les formules (17) ou (21), il suffit de faire

$$\left.\begin{aligned} u_{\alpha\beta} &= \eta_\alpha h_\beta \mathfrak{P} \\ v_{\gamma\delta} &= \frac{\partial \Lambda_\delta}{\partial q_\gamma} \mathfrak{P}^{-1} \end{aligned}\right\} \quad \mathfrak{P} = \text{fonction quelconque des } x.$$

**55.** Supposons enfin qu'une au moins des $\eta_\alpha$ ne soit pas une constante.

Alors (42) donne

$$(44)\qquad \begin{cases} \eta_\alpha = \psi'_{\alpha\delta}(\Lambda_\delta) = \psi'_{\alpha\delta_0}(\Lambda_{\delta_0}) = \psi'_{\alpha\delta_0}(\omega), \\ \omega = \Lambda_{\delta_0}; \end{cases}$$

$\omega$ n'est sûrement pas une constante, puisque $\eta_\alpha$ est variable. Pour le même motif

$$\psi''_{\alpha\delta}(\Lambda_\delta) \neq 0, \qquad \text{car} \qquad \psi'_{\alpha\delta}(\Lambda_\delta) \neq \text{const.}$$

La relation

$$\psi'_{\alpha\delta}(\Lambda_\delta) = \psi'_{\alpha\delta_0}(\omega)$$

peut être résolue par rapport à $\Lambda_\delta$ et $\Lambda_\delta$ est une fonction de la variable $\omega$. En vertu de (42), $X_{\alpha\delta}$ ne dépend non plus que de $\omega$. Pareillement pour $\eta_\alpha$.

Alors

$$(45)\qquad \frac{dX_{\alpha\delta}}{d\omega} = \frac{dX_{\alpha\delta}}{d\Lambda_\delta}\frac{d\Lambda_\delta}{d\omega} = \eta_\alpha f'_\delta(\omega).$$

**56.** Les conditions trouvées sont suffisantes, car

$$dX_{\alpha\delta} = \eta_\alpha f'_\delta(\omega)\, d\omega = \eta_\alpha f'_\delta \sum_\gamma \frac{\partial\omega}{\partial q_\gamma} dq_\gamma = \eta_\alpha f'_\delta \sum_{\gamma\beta} \frac{\partial\omega}{\partial q_\gamma} h_\beta\, dx_{\beta\gamma}.$$

Pour assurer la formule (17), il suffit de poser

$$\left.\begin{aligned} u_{\alpha\beta} &\doteq \eta_\alpha h_\beta \mathfrak{P} \\ v_{\gamma\delta} &= \frac{\partial\omega}{\partial q_\gamma} f'_\delta \mathfrak{P}^{-1} \end{aligned}\right\} \quad \mathfrak{P} = \text{fonction quelconque des } x.$$

Ce sera la *troisième solution*.

**57.** Si l'on omet la solution banale $X = KxL + M$ du n° 49 et les facteurs $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^{-1}$ aisés à rétablir, la discussion du présent Chapitre

se résume ainsi, comme expressions trouvées pour .

$$X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}, \qquad dX = u\,dx\,v,$$

$$u = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}\, u_{\alpha\beta}, \qquad v = \sum_{\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}\, v_{\gamma\delta}.$$

*Première solution* (n$^{os}$ 50 et 51).

$$X_{\alpha\delta} = m_\delta \psi_\alpha(t_\alpha), \qquad t_\alpha = \sum_{\beta\gamma} K_{\alpha\beta}\, l_\gamma\, x_{\beta\gamma},$$

$$\psi_\alpha = \text{fonction arbitraire},$$

$$\left.\begin{aligned} u_{\alpha\beta} &= \psi'_\alpha(t_\alpha)\, K_{\alpha\beta} \\ v_{\gamma\delta} &= l_\gamma m_\delta \end{aligned}\right\} K_{\alpha\beta},\ l_\gamma, m_\delta = \text{const.},$$

*Deuxième solution* (n° 54).

$$\left.\begin{aligned} X_{\alpha\delta} &= \eta_\alpha \Lambda_\delta + M_{\alpha\delta} \\ \Lambda_\delta &= \Lambda_\delta(q_1, \ldots, q_\gamma, \ldots, q_r) \\ q_\gamma &= \sum_\beta h_\beta\, x_{\beta\gamma} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\eta_\alpha, M_{\alpha\delta}, h_\beta = \text{const.}, \\ &\Lambda = \text{fonction arbitraire}, \end{aligned}$$

$$u_{\alpha\beta} = \eta_\alpha h_\beta,$$

$$v_{\gamma\delta} = \frac{\partial \Lambda_\delta}{\partial q_\gamma}.$$

*Troisième solution* (n° 56).

$$X_{\alpha\delta} = \psi_{\alpha\delta}(\omega), \qquad \psi'_{\alpha\delta}(\omega) = \eta_\alpha(\omega)\, f_\delta(\omega),$$

$$\omega = \omega(q_1, \ldots, q_\gamma, \ldots, q_r),$$

$$q_\gamma = \sum_\beta h_\beta\, x_{\beta\gamma} \qquad (h_\beta = \text{const.})$$

$$u_{\alpha\beta} = h_\beta\, \eta_\alpha(\omega),$$

$$v_{\gamma\delta} = \frac{d\omega}{dq_\gamma} f'_\delta(\omega).$$

Les résultats précédents ont été obtenus en évitant de prendre des coordonnées trop particulières; notamment on a supposé chacune des

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}} \neq 0.$$

Je me propose maintenant de particulariser au contraire les coordonnées, de façon à donner aux solutions une expression aussi simple que possible.

**58**. Reportons-nous aux considérations (**41** et **59**) et reprenons la formule (17). Effectuons un changement de coordonnées spéciales, dans le groupe (ε), de façon que la matrice $(y)$ afférente à une quantité $y$ de (ε′) se trouve remplacée par la matrice $(g)^{-1}(y)(g)$. Alors la formule (17) devient

$$(g)^{-1}(dX)(g) = (g)^{-1}(u)(g)(g)^{-1}(dx)(g)(g)^{-1}(v)(g).$$

Cela équivaut à transformer les matrices $r$ — aires

$$(u) = [u_{\alpha\beta}], \qquad (v) = [v_{\gamma\delta}]$$

par la matrice $r$ — aire $(g)$.

Si les $u_{\alpha\beta}$ sont des constantes, on peut supposer (**59**), si $(u)$ a le rang 1, soit $u_{11} = c \neq 0$, les autres $u_{\alpha\beta}$ étant nuls, soit $u_{12} = 1$, les autres $u_{\alpha\beta}$ étant nuls.

Pareillement, si les $v_{\gamma\delta} =$ const., on pourra faire encore soit $v_{11}$ seul, soit $v_{12}$ seul, différent de zéro, si $(v)$ a le rang 1.

**59**. Prenons d'abord la *première solution* (**57**). $(v)$ a le rang 1, puisque $v_{\gamma\delta} = l_\gamma m_\delta$; $l_\gamma$, $m_\delta =$ const.

Faisons d'abord $v_{11}$ seul $\neq 0$;

$$l_1 m_1 \neq 0, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_r; \qquad m_2, \quad \ldots, \quad m_r = 0.$$

Les $X_{\alpha 1}$ sont seuls $\neq 0$. De plus

$$l_\alpha = l_1 \sum_\beta K_{\alpha\beta} x_{\beta 1},$$

$$(46) \qquad X = \sum_\alpha \varepsilon_{\alpha 1} X_{\alpha 1} \Big( \sum_\beta K_{\alpha\beta} x_{\beta 1} \Big).$$

Faisons maintenant $v_{12}$ seul $\neq 0$. $l_1 m_2 \neq 1$. Un calcul simple donne

$$(47) \qquad X = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha 2} X_{\alpha 2}\Big(\sum_{\beta} K_{\alpha\beta} x_{\beta 1}\Big).$$

Ces deux expressions de X ne sont pas essentiellement différentes, car, multipliant par derrière (**56**) les deux membres de (47) par le fondamental $\varepsilon_{21}$, on retombe sur (46).

(46) sera donc la formule définitive de la *première solution*, type II de l'*Introduction*.

**60.** Prenons la *seconde solution* (**57**). La $r$ — aire

$$(u) = [\eta_\alpha h_\beta]$$

est formée de constantes et a le rang 1.

Faisons $u_{11}$ seul $\neq 0$. Les constantes $M_{\alpha\delta}$ n'interviennent qu'en ajoutant une constante à X. Les $X_{1\delta}$ sont seuls $\neq 0$, $q_\gamma = x_{1\gamma} h_1$,

$$(48) \qquad X = \sum_{\delta} \varepsilon_{1\delta} X_{1\delta}(x_{11}, \ldots, x_{1\gamma}, \ldots, x_{1r}).$$

Si l'on fait $u_{12} = \eta_1 h_2$ seul $\neq 0$, $q_\gamma = h_2 x_{2\gamma}$.

$$(49) \qquad X = \sum_{\delta} \varepsilon_{1\delta} X_{1\delta}(x_{21}, \ldots, x_{2\gamma}, \ldots, x_{2r}).$$

Multiplions par devant, dans (49), les deux membres par le fondamental $\varepsilon_{21}$. Il vient

$$X = \sum_{\delta} \varepsilon_{2\delta} X_{1\delta}(x_{21}, \ldots, x_{2r}),$$

ce qui ne diffère de (48) que par l'écriture. (48) sera la formule définitive de la *deuxième solution*, type III de l'*Introduction*.

**61.** Ces multiplications (**59** et **60**) par un fondamental, par devant ou par derrière, sont licites (**56**), car elles n'augmentent pas l'indice de monogénéité.

**62**. Prenons enfin la *troisième solution* (**57**). Aucune des deux matrices $(u)$ ou $(v)$ n'est composée de constantes. La méthode précédente n'est plus applicable. On laissera à la *troisième solution* l'expression du n° **57**. C'est, avec d'insignifiants changements de notations, le type IV de l'*Introduction*.

# *Recherches sur les fractions continues algébriques* (¹);

Par M. AURIC,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

## INTRODUCTION.

**1.** Nous nous proposons, dans cette étude, de perfectionner, sur certains points importants, la détermination des conditions de convergence d'une fraction continue algébrique et de rattacher plus étroitement ce mode de développement si fécond, d'une part à la théorie des fonctions méromorphes et quasi-méromorphes, d'autre part à celle des intégrales définies à coupures déjà envisagées par Hermite et surtout par Stieltjes dans ses mémorables recherches.

En premier lieu il importe de mettre ce mode de développement sous la forme normale, canonique, qui lui convient. A cet effet considérons un polynome ou une série $S_0$ ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de la variable et de degré maximum $k$ :

$$S_0 = a_0^k x^k + a_0^{k-1} x^{k-1} + \dots \qquad (a_0^k \neq 0).$$

Considérons de même un polynome ou une série $S_1$ de degré maximum $k-1$ :

$$S_1 = a_1^{k-1} x^{k-1} + a_1^{k-2} x^{k-2} + \dots \qquad (a_1^{k-1} \neq 0).$$

En divisant $S_0$ par $S_1$ nous obtiendrons comme quotient un binome

(¹) Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (Grand Prix des Sciences mathématiques).

de la forme $\alpha_1 x + \beta_1$ et comme reste un polynome ou une série $-S_2$ de degré maximum $k-2$ :

$$S_2 = a_2^{k-2} x^{k-2} + a_2^{k-3} x^{k-3} + \ldots,$$

et, en général, on aura

$$a_2^{k-2} \neq 0.$$

On pourra donc écrire

$$S_0 = (\alpha_1 x + \beta_1) S_1 - S_2.$$

De même, en effectuant la division de $S_1$ par $S_2$, on aura

$$S_1 = (\alpha_2 x + \beta_2) S_2 - S_3$$

avec

$$S_3 = a_3^{k-3} x^{k-3} + a_3^{k-4} x^{k-4} + \ldots,$$

et, en général, on aura

$$a_3^{k-3} \neq 0,$$

et ainsi de suite.

Dès lors la fraction $\frac{S_0}{S_1}$ se développera en fraction continue sous la forme suivante [1] :

$$\text{(A)} \qquad \frac{S_0}{S_1} = \alpha_1 x + \beta_1 \dot{-} \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2} \dot{-} \frac{1}{\alpha_3 x + \beta_3} \dot{-} \ldots,$$

et il est clair que cette fraction continue sera limitée ou illimitée, selon que $\frac{S_0}{S_1}$ sera réductible ou non à une fraction rationnelle.

Le calcul qui précède est, d'ailleurs, identique au procédé classique pour la recherche du plus grand commun diviseur entre $S_0$ et $S_1$; si $S_{n+1}$ est le premier reste identiquement nul, $S_n$ sera le plus grand commun diviseur cherché et $\alpha_n x + \beta_n$ le dernier dénominateur partiel [2] de la fraction continue.

---

[1] Notation abrégée très répandue en Allemagne (Baltzer, Müller, etc.).

[2] Terminologie empruntée à l'allemand (*Theilnenner*) de préférence à l'appellation française, *quotient incomplet*, qui peut donner lieu à confusion : nous

Telle est, semble-t-il, la forme normale, canonique (A) sous laquelle se présentera, en général, le développement d'une fraction continue algébrique, si on la considère comme le quotient de deux séries entières dont les degrés maxima diffèrent d'une unité.

2. Toutefois, il pourra arriver exceptionnellement que les $m$ premiers termes d'un reste $S_i$ soient nuls simultanément : dans ce cas le quotient de $S_{i-1}$ par $S_i$, au lieu d'être un binome de la forme $\alpha x + \beta$, sera un polynome de la forme

$$\alpha x^{m+1} + \beta x^m + \ldots + \mu x + \nu.$$

Si ce fait exceptionnel se présente à chaque division, le développement en fraction continue prendra la forme

$$\text{(B)} \qquad \frac{S_0}{S_1} = R_1 \dotplus \frac{1}{R_2} \dotplus \frac{1}{R_3} \dotplus \ldots,$$

dans laquelle $R_i$ représente un polynome entier de degré déterminé; mais, de ce qui précède, il résulte clairement que cette forme de développement (B), loin de représenter la forme normale, canonique, représente, au contraire, un développement ayant des propriétés restrictives et exceptionnelles, et, par suite, ne possède nullement le caractère de généralité qu'on serait tenté de lui supposer *a priori*.

3. Il est cependant possible de généraliser la forme normale (A), sans pourtant tomber dans le cas particulier exceptionnel que nous venons de signaler.

Considérons, comme précédemment, le polynome ou la série $S_0$ de degré maximum $k$.

Soit de même un polynome ou une série $S_1$ de degré maximum $k-i$ :

$$S_1 = a_1^{k-i} x^{k-i} + a_1^{k-i-1} x^{k-i-1} + \ldots.$$

---

appellerons de même *numérateurs partiels* (*Theilzähler*) les numérateurs des diverses fractions successives; enfin les $S_i$ seront appelés les *restes* ou les *termes* successifs de la fraction continue.

Divisons $S_0$ par $S_1$ et poussons la division jusqu'à obtenir pour le quotient $\lambda_1$, qui est de degré maximum $i$, un polynome de la forme

$$\lambda_1 = \alpha_1^i x^i + \alpha_1^{i-1} x^{i-1} + \ldots + \alpha_1^{i-m} x^{i-m}.$$

Le reste de la division sera évidemment de degré maximum $k-m-1$ et de la forme

$$- a_2^{k-2i} x^{k-m-1} - a_2^{k-2i-1} x^{k-m-2} - a_2^{k-2i-2} x^{k-m-3} - \ldots,$$

et, en général, on aura

$$a_2^{k-2i} \neq 0.$$

Si nous posons

$$S_2 = a_2^{k-2i} x^{k-2i} + a_2^{k-2i-1} x^{k-2i-1} + \ldots,$$

on aura

$$S_0 = \lambda_1 S_1 - x^{2i-m-1} S_2.$$

De même, en divisant $S_1$ par $S_2$, on obtiendra

$$S_1 = \lambda_2 S_2 - x^{2i-m-1} S_3$$

avec

$$S_3 = a_3^{k-3i} x^{k-3i} + a_3^{k-3i-1} x^{k-3i-1} + \ldots,$$

et ainsi de suite.

Dès lors le développement de $\frac{S_0}{S_1}$ en fraction continue prendra la forme

$$(C) \qquad \frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 - \frac{x^{2i-m-1}}{\lambda_2} - \frac{x^{2i-m-1}}{\lambda_3} - \cdots$$

avec

$$\lambda_n = \alpha_n^i x^i + \alpha_n^{i-1} x^{i-1} + \ldots + \alpha_n^{i-m} x^{i-m}.$$

4. Examinons en premier lieu le cas où $\lambda_n$ se réduit à un monome; dans la forme (C), il faut faire $m = 0$, ce qui donne

$$(C') \qquad \frac{S_0}{S_1} = \alpha_1 x^i - \frac{x^{2i-1}}{\alpha_2 x^i} - \frac{x^{2i-1}}{\alpha_3 x^i} - \ldots.$$

En divisant les deux membres par $x^i$, il vient

$$\text{(D)}\qquad \frac{S_0}{x^i S_1} = \alpha_1 + \frac{\frac{1}{x}}{\alpha_2} + \frac{\frac{1}{x}}{\alpha_3} + \frac{\frac{1}{x}}{\alpha_4} + \dots$$

C'est la forme habituellement employée pour réduire en fraction continue une série entière ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de $x$. Par une transformation facile, cette forme se ramène manifestement à la suivante :

$$\text{(D')}\qquad \frac{S_0}{x^i S_1} = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 . x} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4 . x} + \frac{1}{\alpha_5} + \dots$$

C'est, à la constante $\alpha_1$ près, et dans le cas où les $\alpha_n$ sont réels et positifs, la forme qui a fait l'objet des recherches de Stieltjes. Il est clair, d'ailleurs, que cette forme conduira à des résultats différents, du moins au point de vue formel, suivant que l'on s'arrêtera à un dénominateur partiel de rang pair ou de rang impair (¹); en groupant deux par deux ces dénominateurs partiels successifs, Stieltjes a montré, par une transformation facile, que la forme (D') se ramène à la forme normale (A), laquelle ne présente plus cet inconvénient ou, pour mieux dire, cette influence de la parité du dernier dénominateur partiel employé.

La forme normale (A) doit donc *a priori* conduire à des résultats plus généraux que la forme (D'); remarquons, d'ailleurs, que cette dernière forme peut être considérée comme un cas particulier exceptionnel de la forme (A) (cas où $\alpha_{2n+1} = \beta_{2n} = 0$).

En divisant les deux membres de (C') par $x^{i-1}$, il vient

$$\text{(E)}\qquad \frac{S_0}{x^{i-1} S_1} = \alpha_1 x + \frac{x}{\alpha_2 . x} + \frac{x}{\alpha_3 . x} + \frac{x}{\alpha_4 . x} + \dots,$$

laquelle forme se ramène manifestement à

$$\text{(E')}\qquad \frac{S_0}{x^{i-1} S_1} = \alpha_1 x + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3 . x} + \frac{1}{\alpha_4} + \dots$$

(¹) De même les formules qui permettent de passer d'un développement de Taylor à la fraction continue (D) correspondante ne sont pas les mêmes (*voir* Chap. VI), suivant que le rang du dénominateur partiel est pair ou impair.

Celle-ci ne diffère de la forme de Stieltjes (D′) que par la parité du dénominateur partiel affecté de la variable $x$; on peut également considérer cette forme comme un cas particulier de la forme normale (A) (cas où $\alpha_{2n} = \beta_{2n+1} = 0$).

La forme (C′) devient également, en posant $x = y^2$ et en divisant les deux membres par $y^{2i-1}$,

$$(\mathrm{F}) \qquad \frac{S_0}{y^{2i-1} S_1} = \alpha_1 y \dotplus \frac{1}{\alpha_2 y} \dotplus \frac{1}{\alpha_3 y} \dotplus \frac{1}{\alpha_4 y} \dotplus \ldots,$$

dans laquelle tous les dénominateurs partiels, quelle que soit leur parité, sont affectés de la variable $y = \sqrt{x}$; on peut aussi considérer cette forme comme un cas particulier de la forme (A) (cas où $\beta_n = 0$).

Dans les formes (D′), (E′), (F), nous avons ramené les numérateurs partiels à l'unité; on peut faire cette opération sur les dénominateurs partiels et, par une transformation facile, la forme (C′) devient

$$(\mathrm{G}) \qquad \frac{S_0}{\alpha_1 x^i S_1} = 1 \dotplus \frac{\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 x}}{1} \dotplus \frac{\frac{1}{\alpha_2 \alpha_3 x}}{1} \dotplus \frac{\frac{1}{\alpha_3 \alpha_4 x}}{1} \dotplus \ldots.$$

En posant

$$\frac{1}{\alpha_{n-1} \alpha_n} = \rho_n, \qquad \frac{1}{x} = z,$$

il vient

$$(\mathrm{G}') \qquad \frac{z^i S_0}{\alpha_1 S_1} = 1 \dotplus \frac{\rho_2 z}{1} \dotplus \frac{\rho_3 z}{1} \dotplus \frac{\rho_4 z}{1} \dotplus \ldots$$

qui est également une forme très usitée.

Considérons maintenant le cas où les $\lambda_n$ sont des binomes; dans la forme (C), il faut faire $m = 1$, ce qui donne

$$(\mathrm{C}'') \qquad \frac{S_0}{S_1} = \alpha_1 x^i + \beta_1 x^{i-1} \dotplus \frac{x^{2i-2}}{\alpha_2 x^i + \beta_2 x^{i-1}} \dotplus \frac{x^{2i-2}}{\alpha_3 x^i + \beta_3 x^{i-1}} \dotplus \ldots,$$

d'où, en divisant les deux membres par $x^{i-1}$, on retombe manifestement sur la forme normale (A) :

$$\frac{S_0}{x^{i-1} S_1} = \alpha_1 x + \beta_1 \dotplus \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2} \dotplus \frac{1}{\alpha_3 x + \beta_3} \dotplus \ldots.$$

En divisant les deux membres de ($C''$) par $x^i$, on trouve

$$\frac{S_0}{x^i S_1} = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{x} \dotplus \frac{\frac{1}{x^2}}{\alpha_2 + \frac{\beta_2}{x}} \dotplus \frac{\frac{1}{x^2}}{\alpha_3 + \frac{\beta_3}{x}} \dotplus \cdots$$

et, en posant $\frac{1}{x} = z$,

$$\text{(H)} \qquad \frac{z^i S_0}{S_1} = \alpha_1 + \beta_1 z \dotplus \frac{z^2}{\alpha_2 + \beta_2 z} \dotplus \frac{z^2}{\alpha_3 + \beta_3 z} \dotplus \cdots$$

De même, en posant $x = y^2$ et en divisant les deux membres de ($C''$) par $y^{2i-1}$, on trouve

$$\frac{S_0}{y^{2i-1} S_1} = \alpha_1 y + \frac{\beta_1}{y} \dotplus \frac{\frac{1}{y^2}}{\alpha_2 y + \frac{\beta_2}{y}} \dotplus \frac{\frac{1}{y^2}}{\alpha_3 y + \frac{\beta_3}{y}} \dotplus \cdots$$

et, en posant $\frac{1}{y} = \upsilon$,

$$\text{(H')} \qquad \frac{\upsilon^{2i-1} S_0}{S_1} = \frac{\alpha_1}{\upsilon} + \beta_1 \upsilon \dotplus \frac{\upsilon^2}{\frac{\alpha_2}{\upsilon} + \beta_2 \upsilon} \dotplus \frac{\upsilon^2}{\frac{\alpha_3}{\upsilon} + \beta_3 \upsilon} \dotplus \cdots.$$

**5.** En résumé, on verrait que les formes normales généralisées ($C$) se ramènent à trois catégories principales :

*Première catégorie :* $i = m$. — Dans ce cas, on a

$$\frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 \dotplus \frac{x^{m-1}}{\lambda_2} \dotplus \frac{x^{m-1}}{\lambda_3} \dotplus \frac{x^{m-1}}{\lambda_4} \dotplus \cdots,$$

avec

$$\lambda_n = \alpha_n^m x^m + \alpha_n^{m-1} x^{m-1} + \ldots + \alpha_n^1 x + \alpha_n^0.$$

La fraction continue ne renferme que des polynomes entiers en $x$ : si $S_0$ est de degré maximum $k$, $S_n$ sera de degré maximum $k - mn$.

*Deuxième catégorie :* $i = 0$. — Dans ce cas, en posant $x = \frac{1}{z}$, il vient

$$\frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 \dotplus \frac{z^{m+1}}{\lambda_2} \dotplus \frac{z^{m+1}}{\lambda_3} \dotplus \frac{z^{m+1}}{\lambda_4} \dotplus \cdots,$$

avec

$$\lambda_n = \beta_n^m z^m + \beta_n^{m-1} z^{m-1} + \ldots + \beta_n^1 z + \beta_n^0.$$

La fraction continue ne renferme que des polynomes entiers en $z = \frac{1}{x}$; $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont de même degré minimum en $z$.

*Troisième catégorie.* — Nous ferons rentrer dans cette catégorie les développements pour lesquels les numérateurs partiels sont tous égaux à l'unité; il sera nécessaire à cet effet de faire une distinction selon la parité de $m$.

*a. m impair.* — Nous poserons dans la forme (C)

$$2i - m - 1 = 2h,$$

d'où

$$i = \frac{m+1}{2} + h = j + h,$$

et la forme devient, en divisant les deux membres par $x^h$,

$$\text{(I)} \qquad \frac{S_0}{x^h S_1} = \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_4} - \ldots,$$

avec

$$\lambda_n = \alpha_n x^j + \beta_n x^{j-1} + \ldots + \mu_n x^{2-j} + \nu_n x^{1-j}.$$

*b. m pair.* — Nous poserons dans la forme (C)

$$2i - m - 1 = 2h - 1,$$

d'où

$$i = \frac{m}{2} + h = j + h.$$

Par suite, en divisant les deux membres par $x^h$,

$$\frac{S_0}{x^h S_1} = \lambda_1 - \frac{\frac{1}{x}}{\lambda_2} - \frac{\frac{1}{x}}{\lambda_3} - \frac{\frac{1}{x}}{\lambda_4} - \ldots,$$

avec

$$\lambda_n = \alpha_n x^j + \beta_n x^{j-1} + \ldots + \mu_n x^{1-j} + \nu_n x^{-j}.$$

En posant $x = y^2$, on pourra multiplier les deux membres par $y$ et il

viendra

$$\text{(J)} \qquad \frac{S_0}{y^{2h-1}S_1} = \lambda_1 y - \frac{1}{\lambda_2 y} - \frac{1}{\lambda_3 y} - \frac{1}{\lambda_4 y} - \ldots,$$

avec

$$\lambda_n y = \alpha_n y^{2j+1} + \beta_n y^{2j-1} + \ldots + \mu_n y^{3-2j} + \nu_n y^{1-2j}.$$

6. Nous aurions pu diriger nos opérations de manière à réduire à l'unité tous les dénominateurs partiels. Considérons, comme précédemment, deux polynomes ou séries $S_0$, $S_1$ et admettons qu'ils aient le même premier terme $Ax^k$ :

$$S_0 = Ax^k + a_0^{k-1}x^{k-1} + a_0^{k-2}x^{k-2} + \ldots.$$
$$S_1 = Ax^k + a_1^{k-1}x^{k-1} + a_1^{k-2}x^{k-2} + \ldots.$$

On aura évidemment

$$S_0 - S_1 = -(a_1^{k-1} - a_0^{k-1})x^{k-1} - (a_1^{k-2} - a_0^{k-2})x^{k-2} - \ldots,$$

et l'on pourra écrire

$$S_0 = S_1 - \frac{\alpha_1}{x}S_2, \qquad \alpha_1 = \frac{a_1^{k-1} - a_0^{k-1}}{A},$$

$S_2$ étant un polynome ou série dont le premier terme sera $Ax^k$, comme $S_0$ et $S_1$.

On aura de même

$$S_1 = S_2 - \frac{\alpha_2}{x}S_3,$$

et ainsi de suite; d'où l'on déduit la forme de développement déjà obtenue :

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 - \frac{\frac{\alpha_1}{x}}{1} - \frac{\frac{\alpha_2}{x}}{1} - \frac{\frac{\alpha_3}{x}}{1} - \ldots.$$

Si les polynomes ou séries $S_0$, $S_1$ ont leurs $m$ premiers termes identiques, il est facile de reconnaître que l'on pourra déterminer le polynome $P_2$, tel que l'on ait

$$S_0 = S_1 - P_2 S_2,$$

$S_2$ commençant par les mêmes $m$ premiers termes que $S_0$ et $S_1$ : il suffira, en effet, de diviser $S_0 - S_1$ par le polynome $\pi$ formé avec ces $m$ premiers termes communs et d'arrêter au $m^{\text{ième}}$ terme le quotient $P_2$ qui sera ainsi de degré maximum $-m$ et de degré minimum $-(2m-1)$; on aura ainsi le développement

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 \dotplus \frac{P_2}{1} \dotplus \frac{P_3}{1} \dotplus \frac{P_4}{1} \dotplus \ldots.$$

De même considérons une série entière $S_0$ représentant, non plus un développement de Taylor, mais un développement de Laurent illimité dans les deux sens et ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la variable

$$S_0 = \ldots a_0^k x^k + \ldots + a_0^1 x + a_0^0 + b_0^1 \frac{1}{x} + \ldots + b_0^k \frac{1}{x^k} + \ldots.$$

Soit également

$$S_1 = \ldots a_1^n x^n + \ldots + a_1^1 x + a_1^0 + b_1^1 \frac{1}{x} + \ldots + b_1^k \frac{1}{x^k} + \ldots.$$

Il est clair qu'en posant

$$\beta_1 a_1^0 = a_0^0,$$

on pourra écrire

$$S_0 = \beta_1 S_1 - S_2,$$

et dans $S_2$ on aura

$$a_2^0 = 0,$$

et, en général,

$$a_2^1 \neq 0, \qquad b_2^1 \neq 0.$$

De même, en posant

$$S_1 = (\alpha_2 x + \beta_2) S_2 - S_3,$$

on pourra déterminer $\alpha_2$ et $\beta_2$ de manière à avoir dans $S_3$

$$a_3^0 = a_3^1 = 0.$$

Il suffira pour cela de satisfaire aux relations

$$a_1^0 = \alpha_2 b_2^1, \qquad a_1^1 = \beta_2 a_2^1.$$

De même, en posant

$$S_2 = \left(\beta_3 + \frac{\gamma_3}{x}\right) S_3 - S_4,$$

on pourra déterminer $\beta_3$ et $\gamma_3$ de manière à avoir, dans $S_4$,

$$a_4^1 = a_4^0 = b_4^1 = 0.$$

Il suffira d'écrire

$$a_2^1 = \gamma_3 a_3^2, \qquad b_2^1 = \beta_3 b_3^1,$$

et ainsi de suite, les dénominateurs partiels étant alternativement de la forme

$$\alpha_{2n} x + \beta_{2n} \quad \text{et} \quad \beta_{2n+1} + \gamma_{2n+1} \frac{1}{x}.$$

En continuant de la sorte on voit que $S_{2n}$ pourra s'écrire

$$S_{2n} = x^n P(x) + x^{-n} Q\left(\frac{1}{x}\right),$$

$P(x)$ et $Q\left(\frac{1}{x}\right)$ étant des séries ordonnées par rapport aux puissances croissantes et toutes positives de la variable.

La connaissance des deux séries initiales $S_0$, $S_1$ permettra donc de déterminer une suite limitée ou illimitée

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \ldots,$$

ce qui constitue une généralisation naturelle de la théorie des fractions continues.

D'une manière tout à fait générale on peut admettre que les séries ou polynomes $S_0$, $S_1$, $S_2$, ... sont données au moyen d'une relation récurrente de la forme

$$\alpha_{n-1} S_{n-1} = \beta_n S_n - \gamma_{n+1} S_{n+1},$$

dans laquelle les $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$ sont des fonctions connues en $x$ et en $n$.

Il sera possible, dès lors, de mettre le rapport $\frac{S_0}{S_1}$ des deux termes initiaux sous la forme d'un développement en fraction continue.

Nous avons, en effet, la série de relations

$$S_0 = \frac{\beta_1}{\alpha_0} S_1 - \frac{\gamma_2}{\alpha_0} S_2,$$

$$S_1 = \frac{\beta_2}{\alpha_1} S_2 - \frac{\gamma_3}{\alpha_1} S_3,$$

d'où

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_0} \dot{-} \frac{\frac{\gamma_2}{\alpha_0}}{\frac{\beta_2}{\alpha_1}} \dot{-} \frac{\frac{\gamma_3}{\alpha_1}}{\frac{\beta_3}{\alpha_2}} \dot{-} \frac{\frac{\gamma_4}{\alpha_2}}{\frac{\beta_4}{\alpha_3}} \dot{-} \ldots,$$

et, par une réduction facile,

$$\frac{\alpha_0 S_0}{S_1} = \beta_1 \dot{-} \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2} \dot{-} \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3} \dot{-} \frac{\alpha_3 \gamma_4}{\beta_4} \dot{-} \ldots,$$

qui constitue le développement le plus général.

On trouverait de même par les relations récurrentes ci-dessus

$$\frac{\gamma_{n+1} S_{n+1}}{S_n} = \beta_n \dot{-} \frac{\alpha_{n-1} \gamma_n}{\beta_{n-1}} \dot{-} \frac{\alpha_{n-2} \gamma_{n-1}}{\beta_{n-2}} \dot{-} \frac{\alpha_{n-3} \gamma_{n-2}}{\beta_{n-3}} \dot{-} \ldots.$$

**7.** Le présent Mémoire est divisé en six Chapitres.

Dans le premier, nous avons établi les formules générales qui permettent d'exprimer un reste quelconque, $S_i$, en fonction de deux autres restes également quelconques.

Nous avons été amené à introduire des symboles $Q_n^i$ qui sont les termes des fractions approchées ordinairement dénommées *réduites* et dont nous démontrons plusieurs propriétés générales. Nous établissons enfin une formule qui permet de grouper plusieurs numérateurs et dénominateurs partiels successifs.

Dans le deuxième Chapitre nous étudions les conditions de convergence d'une fraction continue selon le mode de croissance ou de décroissance pour $n = \infty$ de $Q_n^0$ ou de $\frac{S_0}{S_n}$; nous démontrons ensuite une proposition générale relative au domaine de convergence de la fraction continue où l'on voit apparaître, sous certaines restrictions, mais d'une manière élémentaire, la notion de coupure introduite par Hermite et par Stieltjes.

Dans le troisième Chapitre, nous étudions les fractions continues de la forme

$$Y_1 = \lambda_1 \dot{-} \frac{1}{\lambda_2} \dot{-} \frac{1}{\lambda_3} \dot{-} \frac{1}{\lambda_4} \dot{-} \cdots$$

ou

$$Y_2 = 1 \dot{-} \frac{\mu_2}{1} \dot{-} \frac{\mu_3}{1} \dot{-} \frac{\mu_4}{1} \dot{-} \cdots,$$

dans lesquelles les $\lambda_n$, $\mu_n$ sont des polynomes entiers en $x$ et $\frac{1}{x}$ dont les coefficients diminuent au delà de toute limite pour $n = \infty$.

Dans le premier cas, on peut dire que la fraction continue représente les deux fonctions méromorphes ou quasi-méromorphes

$$Y_1 = \frac{P_0 \pm i I_0}{P_1 \pm i I_1} \qquad \text{avec} \qquad P_0 I_1 - P_1 I_0 = 1,$$

et nous indiquons une limite supérieure de l'ordre apparent et, par conséquent, du genre des fonctions entières ou quasi-entières $P_0$, $P_1$, $I_0$, $I_1$ aux points essentiels o et $\infty$.

Dans le second cas, $Y_2$ représente une fonction méromorphe ou quasi-méromorphe dont l'ordre apparent a une limite supérieure qui se détermine comme dans le cas précédent.

Dans le quatrième Chapitre, nous démontrons tout d'abord que la fraction périodique simple

$$Y = \lambda \dot{-} \frac{\mu}{\lambda} \dot{-} \frac{\mu}{\lambda} \dot{-} \cdots$$

est constamment égale à la racine de plus grand module de l'équation caractéristique

$$Y^2 - \lambda Y + \mu = 0.$$

Cette fraction est partout convergente, sauf sur les courbes ou portions de courbes pour lesquelles les deux racines ont même module et qui forment une véritable coupure : sur ces courbes on a $\frac{\lambda^2}{\mu} = t$, $t$ étant un nombre réel quelconque compris entre o et $+4$.

Si la fraction continue est de la forme

$$Y = \lambda_1 \dot{-} \frac{\mu_2}{\lambda_2} \dot{-} \frac{\mu_3}{\lambda_3} \dot{-} \frac{\mu_4}{\lambda_4} \dot{-} \cdots,$$

$\lambda_n$, $\mu_n$ étant des polynomes entiers en $x$ et $\frac{1}{x}$ dont les limites respectives pour $n = \infty$ sont $\lambda$ et $\mu$, deux cas sont à considérer :

*a*. $\frac{\lambda^2}{\mu}$ est égal à un nombre réel quelconque, $t$, compris entre o et $+4$.

Dans ce cas l'équation caractéristique

$$Y^2 - \lambda Y + \mu = 0$$

a deux racines $\alpha$, $\beta$, de même module.

On peut dire alors que la fraction continue représente sur tout le plan complexe deux fonctions méromorphes ou quasi-méromorphes aux points essentiels o et $\infty$ :

$$Y_1 = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_1}, \qquad Y_2 = \frac{P_0 - \beta I_0}{P_1 - \beta I_1}, \qquad P_0 I_1 - I_0 P_1 = R_0.$$

L'ordre apparent de $P_0$, $I_0$, $P_1$, $I_1$, $R_0$ a une limite supérieure, en général facile à déterminer.

*b*. $\frac{\lambda^2}{\mu}$ est égal à un nombre autre que $t$ ou à une fraction rationnelle.

Dans ce cas l'équation caractéristique

$$Y^2 - \lambda Y + \mu = 0$$

possède deux racines $\alpha$, $\beta$ dont l'une, $\alpha$ par exemple, a, en général, un module supérieur à celui de l'autre. La fraction continue représente alors la fonction méromorphe ou quasi-méromorphe

$$Y = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_0}, \qquad P_0 I_1 - P_1 I_0 = R_0$$

sur tout le plan complexe, sauf sur les courbes ou portions de courbes pour lesquelles on a

$$\frac{\lambda^2}{\mu} = t,$$

$t$ étant un nombre réel quelconque compris entre o et $+4$.

Dans le Chapitre V, nous étendons à l'axe des $x$ tout entier les résultats que Stieltjes n'avait obtenus que pour la partie négative de cet axe; les notations employées permettent d'apporter de notables simplifications dans l'exposé de ces résultats. Nous indiquons également comment on pourrait généraliser la théorie des fractions continues pour l'appliquer à un système de $k$ fonctions initiales données.

Enfin, dans le dernier Chapitre, nous établissons les formules qui permettent de passer d'une série de Taylor au développement correspondant en fraction continue de la forme normale (A) et nous donnons diverses applications des théories qui précèdent.

# CHAPITRE I.

## FORMULES GÉNÉRALES [1].

**8.** Considérons les relations générales

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} (A)\left\{\begin{array}{l} \rho_{i-n}\, a_{i-n} = \lambda_{i-n+1}\, a_{i-n+1} - \mu_{i-n+2}\, a_{i-n+2}, \\ \rho_{i-n+1}\, a_{i-n+1} = \lambda_{i-n+2}\, a_{i-n+2} - \mu_{i-n+3}\, a_{i-n+3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \rho_{i-2}\, a_{i-2} = \lambda_{i-1}\, a_{i-1} - \mu_{i}\, a_{i}, \end{array}\right. \\ \rho_{i-1}\, a_{i-1} = \lambda_{i}\, a_{i} - \mu_{i+1}\, a_{i+1}, \\ (B)\left\{\begin{array}{l} \rho_{i}\, a_{i} = \lambda_{i+1}\, a_{i+1} - \mu_{i+2}\, a_{i+2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \rho_{i+n-1}\, a_{i+n-1} = \lambda_{i+n}\, a_{i+n} - \mu_{i+n+1}\, a_{i+n+1}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Au moyen des relations (A), en remontant de proche en proche, on peut exprimer $a_i$ en fonction linéaire de $a_{i-n}$ et de $a_{i-n+1}$; de même, au moyen des relations (B), en descendant de proche en proche, on peut exprimer $a_i$ en fonction linéaire de $a_{i+n}$ et de $a_{i+n+1}$; c'est l'étude

---

[1] *Voir* Auric, *Essai sur la théorie des fractions continues* (*Journal de M. Jordan*, 1902, p. 387).

de ces fonctions et de leurs relations entre elles que nous allons entreprendre en premier lieu.

**9.** Posons

$$a_i = \rho_{i+n} P^i_{i+n} a_{i+n} + \mu_{i+n+1} Q^i_{i+n} a_{i+n+1}. \qquad (2)$$

Nous avons, d'après (1), et cela quel que soit le signe de $n$,

$$\rho_{i+n} a_{i+n} = \lambda_{i+n+1} a_{i+n+1} - \mu_{i+n+2} a_{i+n+2},$$

d'où, en substituant dans (2),

$$a_i = (\lambda_{i+n+1} P^i_{i+n} + \mu_{i+n+1} Q^i_{i+n}) a_{i+n+1} - \mu_{i+n+2} P^i_{i+n} a_{i+n+2}.$$

Or, par définition,

$$a_i = \rho_{i+n+1} P^i_{i+n+1} a_{i+n+1} + \mu_{i+n+2} Q^i_{i+n+1} a_{i+n+2},$$

d'où il vient par comparaison

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_{i+n+1} P^i_{i+n+1} &= \lambda_{i+n+1} P^i_{i+n} + \mu_{i+n+1} Q^i_{i+n}, \\ Q^i_{i+n+1} &= - P^i_{i+n}, \end{aligned} \right. \qquad (3)$$

et il est clair que ces relations subsistent quel que soit le signe de $n$.

**10.** En remplaçant dans (2) $P^i_{i+n}$ par sa valeur $-Q^i_{i+n+1}$, tirée de (3), il vient

$$a_i = \mu_{i+n+1} Q^i_{i+n} a_{i+n+1} - \rho_{i+n} Q^i_{i+n+1} a_{i+n}, \qquad (4)$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$a_i = \begin{vmatrix} Q^i_{i+n} & \rho_{i+n} a_{i+n} \\ Q^i_{i+n+1} & \mu_{i+n+1} a_{i+n+1} \end{vmatrix}. \qquad (4')$$

Nous avons par définition

$$a_i = \rho_{i+1} P^i_{i+1} a_{i+1} + \mu_{i+2} Q^i_{i+1} a_{i+2} = \frac{\lambda_{i+1}}{\rho_i} a_{i+1} - \frac{\mu_{i+2}}{\rho_i} a_{i+2},$$

d'où l'on tire

$$-Q^i_{i+2} = P^i_{i+1} = \frac{\lambda_{i+1}}{\rho_i\rho_{i+1}} = \frac{1}{\rho_{i+1}}(\lambda_{i+1}P^i_i + \mu_{i+1}Q^i_i),$$

$$Q^i_{i+1} = -\frac{1}{\rho_i} = \qquad -P^i_i.$$

Il en résulte

(5)
$$\left\{\begin{aligned}
&P^i_i = \frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{\rho_i}(\lambda_i\ P^i_{i-1} + \mu_i\ Q^i_{i-1}),\\
&Q^i_i = 0 = \qquad -P^i_{i-1},\\
&\text{d'où}\\
&P^i_{i-1} = 0 = \frac{1}{\rho_{i-1}}(\lambda_{i-1}P^i_{i-2} + \mu_{i-1}Q^i_{i-2}),\\
&Q^i_{i-1} = \frac{1}{\mu_i} = \qquad -P^i_{i-2},\\
&\text{et, par suite,}\\
&\quad P^i_{i-2} = -\frac{1}{\mu_i}, \qquad Q^i_{i-2} = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}\mu_i}.
\end{aligned}\right.$$

Ce sont des valeurs particulières des symboles P et Q qui nous seront utiles dans la suite.

**11.** La relation (3) nous donne par substitution

(6)
$$\rho_{i+n+1}Q^i_{i+n+2} = \lambda_{i+n+1}Q^i_{i+n+1} - \mu_{i+n+1}Q^i_{i+n};$$

c'est une relation récurrente entre les symboles Q de même indice supérieur.

De même la relation (1)

$$\rho_{i+n}a_{i+n} = \lambda_{i+n+1}a_{i+n+1} - \mu_{i+n+2}a_{i+n+2}$$

donne, si l'on exprime $a_{i+n}$, $a_{i+n+1}$ et $a_{i+n+2}$ en fonction de $a_k$ et de $a_{k+1}$, et si l'on égale dans les deux membres les coefficients de $a_{k+1}$,

(7)
$$\rho_{i+n}Q^{i+n}_k = \lambda_{i+n+1}Q^{i+n+1}_k - \mu_{i+n+2}Q^{i+n+2}_k;$$

c'est une relation récurrente entre les symboles Q de même indice inférieur.

**12**. Les relations (6) et (7) ne sont d'ailleurs que des cas particuliers d'une relation plus générale que nous allons établir.

La relation (4) donne, en effet, par le même procédé que celui employé pour obtenir la relation (7),

$$(8) \qquad Q_k^i = \mu_{i+n+1} Q_{i+n}^i Q_k^{i+n+1} - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^i Q_k^{i+n},$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$(8') \qquad Q_k^i = \begin{vmatrix} Q_{i+n}^i & \rho_{i+n} Q_k^{i+n} \\ Q_{i+n+1}^i & \mu_{i+n+1} Q_k^{i+n+1} \end{vmatrix}.$$

Pour $k = i + n - 1$ cette relation devient

$$Q_{i+n-1}^i = \mu_{i+n+1} Q_{i+n}^i Q_{i+n-1}^{i+n+1} - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^i Q_{i+n-1}^{i+n},$$

et, en observant que, d'après (5),

$$Q_{i+n-1}^{i+n+1} = \frac{\lambda_{i+n}}{\mu_{i+n}\mu_{i+n+1}}, \qquad Q_{i+n-1}^{i+n} = \frac{1}{\mu_{i+n}},$$

on obtient

$$\mu_{i+n} Q_{i+n-1}^i = \lambda_{i+n} Q_{i+n}^i - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^i;$$

c'est la relation (6).

De même, si dans (8) on fait $n = -2$, il vient

$$Q_k^i = \mu_{i-1} Q_{i-2}^i Q_k^{i-1} - \rho_{i-2} Q_{i-1}^i Q_k^{i-2},$$

et, en remplaçant $Q_{i-2}^i$, $Q_{i-1}^i$ par leurs valeurs tirées de (5),

$$\mu_i Q_k^i = \lambda_{i-1} Q_k^{i-1} - \rho_{i-2} Q_k^{i-2};$$

c'est la relation (7).

**13**. Si, dans la relation (8), on fait $k = i$, il vient

$$Q_i^i = 0 = \mu_{i+n+1} Q_{i+n}^i Q_i^{i+n+1} - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^i Q_i^{i+n},$$

d'où, en supposant

$$\rho_{i+n} Q^i_{i+n} Q^i_{i+n+1} \neq 0,$$

$$\frac{Q_i^{i+n}}{Q^i_{i+n}} = \frac{\mu_{i+n+1}}{\rho_{i+n}} \frac{Q_i^{i+n+1}}{Q^i_{i+n+1}}.$$

On aura donc successivement, en supposant $n > 0$,

$$\frac{Q_i^{i+n-1}}{Q^i_{i+n-1}} = \frac{\mu_{i+n}}{\rho_{i+n-1}} \frac{Q_i^{i+n}}{Q^i_{i+n}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{Q_i^{i+1}}{Q^i_{i+1}} = \frac{\mu_{i+2}}{\rho_{i+1}} \frac{Q_i^{i+2}}{Q^i_{i+2}},$$

$$1 = -\frac{\mu_{i+1}}{\rho_i} \frac{Q_i^{i+1}}{Q^i_{i+1}},$$

d'après (5), d'où, en multipliant membre à membre,

$$Q^i_{i+n+1} = -\prod_{j=i}^{j=i+n} \frac{\mu_{j+1}}{\rho_j} Q_i^{i+n+1}.$$

Posons pour simplifier

$$\prod_{j=i}^{j=i+k} \frac{\mu_{j+1}}{\rho_j} = M_i^{i+k+1}, \qquad k > 0;$$

nous obtiendrons la formule fondamentale de réciprocité des indices

$$Q^i_{i+k} = -M_i^{i+k} Q_i^{i+k}, \qquad k > 0;$$

avec $k < 0$, nous aurions

$$Q_i^{i-k} = -M^i_{i-k} Q^i_{i-k},$$

d'où

$$Q^i_{i-k} = -\frac{1}{M^i_{i-k}} Q_i^{i-k}.$$

Il suffira donc de poser

$$M_i^{i-k} = \frac{1}{M^i_{i-k}} \qquad \text{ou} \qquad M_i^{i-k} M^i_{i-k} = 1$$

pour avoir la formule générale

$$Q_j^i = -M_i^j Q_i^j, \tag{9}$$

quel que soit $j$.

En particulier, pour $i=j$, comme $Q_i^i = 0$, $M_i^i$ aurait une valeur indéterminée; nous verrons plus loin que l'on est amené à écrire l'égalité conventionnelle $M_i^i = 1$.

Nous avons admis au début de la démonstration

$$\rho_{i+n} Q_{i+n}^i Q_{i+n+1}^i \neq 0.$$

Si l'on avait $Q_{i+n}^i = 0$, la relation (8) donnerait

$$\rho_{i+n} Q_{i+n+1}^i Q_i^{i+n} = 0.$$

Or on ne peut avoir simultanément

$$Q_{i+n}^i = 0, \qquad Q_{i+n+1}^i = 0,$$

car (8) donnerait, quel que soit $k$, $Q_k^i = 0$, ce qui est en contradiction avec $Q_{i+1}^i = -\frac{1}{\rho_i}$; il faut donc, si les $\rho_i$ sont supposés tous ni nuls ni infinis [1], que l'on ait $Q_i^{i+n} = 0$, ce qui prouve bien la généralité de la formule (9).

**14.** Revenons à la formule (4)

$$a_i = \mu_{i+n+1} Q_{i+n}^i a_{i+n+1} - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^i a_{i+n}.$$

D'après (9) nous avons

$$Q_{i+n}^i = -M_i^{i+n} Q_i^{i+n}, \qquad Q_{i+n+1}^i = -M_i^{i+n+1} Q_i^{i+n+1},$$

---

[1] Nous supposons cette condition remplie, sinon il existerait une relation linéaire entre deux $a_i$ consécutifs et, par suite, tous les $a_i$ s'exprimeraient linéairement en fonction de l'un d'entre eux, hypothèse qui doit être écartée *a priori*, sauf le cas où la fraction continue est limitée.

d'où, en substituant,

$$\frac{a_i}{\rho_{i+n}} = -\frac{\mu_{i+n+1}}{\rho_{i+n}} M_i^{i+n} Q_i^{i+n} a_{i+n+1} + M_i^{i+n+1} Q_i^{i+n+1} a_{i+n};$$

mais il est aisé de vérifier que l'on a, quel que soit le signe de $n$,

$$\frac{\mu_{i+n+1}}{\rho_{i+n}} M_i^{i+n} = M_{i+n}^{i+n+1} M_i^{i+n} = M_i^{i+n+1}$$

et, plus généralement, quels que soient $i$, $j$, $k$,

$$M_i^j M_j^k = M_i^k$$

avec l'égalité conventionnelle $M_i^i = 1$.

Il viendra donc, en substituant,

$$(10) \qquad \frac{a_i}{\rho_{i+n}} = M_i^{i+n+1} (Q_i^{i+n+1} a_{i+n} - Q_i^{i+n} a_{i+n+1}),$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$(10') \qquad a_i = \rho_j M_i^{j+1} \begin{vmatrix} a_j & a_{j+1} \\ Q_i^j & Q_i^{j+1} \end{vmatrix}.$$

Cette formule peut également s'écrire

$$(10'') \qquad a_i = \mu_{j+1} M_i^j \begin{vmatrix} a_j & a_{j+1} \\ Q_i^j & Q_i^{j+1} \end{vmatrix},$$

d'où, par le procédé déjà employé pour obtenir la relation (7),

$$(11) \qquad \frac{Q_k^i}{\rho_j M_i^{j+1}} = \frac{Q_k^i}{\mu_{j+1} M_i^j} = \begin{vmatrix} Q_k^j & Q_k^{j+1} \\ Q_i^j & Q_i^{j+1} \end{vmatrix},$$

et, si $k = i+1$, on aura, puisque $Q_{i+1}^i = -\frac{1}{\rho_i}$,

$$(12) \qquad Q_i^j Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i+1}^j Q_i^{j+1} = -\frac{1}{\rho_i \rho_j M_i^{j+1}} = \frac{M_{j+1}^i}{\rho_i \rho_j} = \frac{M_j^{i+1}}{\mu_{i+1} \mu_{j+1}},$$

et ces relations sont absolument générales.

**15.** Si dans le second membre de (11) nous multiplions la première colonne par $-a_{j+1}$ et la seconde par $a_j$, il viendra, en ajoutant les colonnes ainsi multipliées et en tenant compte des relations

$$a_k = \rho_j M_k^{j+1}(Q_k^{j+1} a_j - Q_k^j a_{j+1}),$$
$$a_i = \rho_j M_i^{j+1}(Q_i^{j+1} a_j - Q_i^j a_{j+1}),$$
$$Q_k^i a_j = \rho_j M_i^{j+1} \begin{vmatrix} Q_k^j & \dfrac{a_k}{\rho_j M_k^{j+1}} \\ Q_i^j & \dfrac{a_i}{\rho_j M_i^{j+1}} \end{vmatrix}$$

et, en réduisant,

$$(13) \qquad Q_k^i a_j = Q_k^j a_i - M_i^k Q_i^j a_k$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$(13') \qquad M_i^k Q_i^j a_k = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ Q_k^i & Q_k^j \end{vmatrix},$$

et, par le procédé déjà employé,

$$(14) \qquad M_i^k Q_i^j Q_l^k = \begin{vmatrix} Q_l^i & Q_l^j \\ Q_k^i & Q_k^j \end{vmatrix}.$$

Telle est la relation la plus générale que nous voulions établir.

En particulier, la relation (13) montre que, si $a_i$ et $a_k$ ont un diviseur commun $\delta$, celui-ci divisera également $Q_k^i a_j$; or, s'il ne divisait pas $Q_k^i$, il diviserait nécessairement $a_j$ ($j$ quelconque); si donc on admet que les $a_j$ ont été débarrassés de leur plus grand commun diviseur, il reste démontré cette proposition fondamentale que le plus grand commun diviseur de $a_i$ et de $a_k$ divise $Q_k^i$.

**16.** Considérons les relations (1); la formule récurrente

$$\frac{\rho_i a_i}{a_{i+1}} = \lambda_{i+1} - \frac{\mu_{i+2} a_{i+2}}{a_{i+1}} = \lambda_{i+1} - \frac{\rho_{i+1}\mu_{i+2}}{\dfrac{\rho_{i+1} a_{i+1}}{a_{i+2}}}$$

permet d'écrire le rapport $\frac{\rho_i a_i}{a_{i+1}}$ sous la forme d'un développement en fraction continue :

$$(15)\quad \frac{\rho_i a_i}{a_{i+1}} = \lambda_{i+1} \dot{-} \frac{\rho_{i+1}\mu_{i+2}}{\lambda_{i+2}} \dot{-} \frac{\rho_{i+2}\mu_{i+3}}{\lambda_{i+3}} \dot{-} \ldots \dot{-} \frac{\rho_{i+n-2}\mu_{i+n-1}}{\lambda_{i+n-1}} \dot{-} \frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}}.$$

Réciproquement, la relation récurrente

$$\frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}} = \lambda_{i+n-1} - \frac{\rho_{i+n-2} a_{i+n-2}}{a_{i+n-1}} = \lambda_{i+n-1} - \frac{\rho_{i+n-2}\,\mu_{i+n-1}}{\dfrac{\mu_{i+n-1} a_{i+n-1}}{a_{i+n-2}}}$$

permet d'écrire

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}} = \lambda_{i+n-1} &\dot{-} \frac{\rho_{i+n-2}\mu_{i+n-1}}{\lambda_{i+n-2}} \\ &\dot{-} \frac{\rho_{i+n-3}\mu_{i+n-2}}{\lambda_{i+n-3}} \dot{-} \ldots \dot{-} \frac{\rho_{i+1}\mu_{i+2}}{\lambda_{i+1}} \dot{-} \frac{\rho_i a_i}{a_{i+1}}. \end{aligned} \right.$$

En particulier, admettons que tous les $\rho_i$ et les $\mu_i$ soient égaux à l'unité, on aura

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \lambda_{i+1} \dot{-} \frac{1}{\lambda_{i+2}} \dot{-} \frac{1}{\lambda_{i+3}} \dot{-} \ldots \dot{-} \frac{1}{\lambda_{i+n-1}} \dot{-} \frac{a_{i+n}}{a_{i+n-1}}$$

et

$$\frac{a_{i+n}}{a_{i+n-1}} = \lambda_{i+n-1} \dot{-} \frac{1}{\lambda_{i+n-2}} \dot{-} \frac{1}{\lambda_{i+n-3}} \dot{-} \ldots \dot{-} \frac{1}{\lambda_{i+1}} \dot{-} \frac{a_i}{a_{i+1}},$$

ce qui constitue un théorème fondamental sur la réversibilité des restes, bien connu dans la théorie des fractions continues arithmétiques.

Admettons que, dans (15), $a_{i+n}$ soit le premier reste nul rencontré ; on aura d'après (4)

$$\begin{aligned} a_i &= \mu_{i+n} Q^i_{i+n-1} a_{i+n} - \rho_{i+n-1} Q^i_{i+n} a_{i+n-1}, \\ a_{i+1} &= \mu_{i+n} Q^{i+1}_{i+n-1} a_{i+n} - \rho_{i+n-1} Q^{i+1}_{i+n} a_{i+n-1} ; \end{aligned}$$

d'où en divisant, puisque $a_{i+n-1} \neq 0$,

$$(17)\qquad \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{Q^i_{i+n}}{Q^{i+1}_{i+n}}.$$

Cette relation aurait pu, d'ailleurs, se démontrer directement, car la formule récurrente (7)

$$\rho_i Q_{i+n}^i = \lambda_{i+1} Q_{i+n}^{i+1} - \mu_{i+2} Q_{i+n}^{i+2}$$

donne, pour $\rho_i \frac{Q_{i+n}^i}{Q_{i+n}^{i+1}}$, le même développement *limité* que pour $\rho_i \frac{a_i}{a_{i+1}}$.

De même admettons que, dans (16), $a_i$ soit le premier reste nul rencontré ; on trouvera comme précédemment, d'après (4),

$$\frac{a_{i+n}}{a_{i+n-1}} = \frac{Q_i^{i+n}}{Q_i^{i+n-1}}.$$

Or

$$Q_{i+n}^i = -M_i^{i+n} Q_i^{i+n}, \qquad Q_{i+n+1}^i = -M_i^{i+n+1} Q_i^{i+n+1};$$

d'où, en substituant,

$$\text{(18)} \qquad \frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}} = \rho_{i+n-1} \frac{Q_{i+n}^i}{Q_{i+n-1}^i}.$$

Cette relation aurait pu d'ailleurs se démontrer directement, car la formule récurrente (6)

$$\rho_{i+n-1} Q_{i+n}^i = \lambda_{i+n-1} Q_{i+n-1}^i - \mu_{i+n-1} Q_{i+n-2}^i$$

conduit, pour $\rho_{i+n-1} \frac{Q_{i+n}^i}{Q_{i+n-1}^i}$, au même développement *limité* que pour $\frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}}$.

Les relations (4) rappelées ci-dessus donnent par division

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{\mu_{i+n} Q_{i+n-1}^i a_{i+n} - \rho_{i+n-1} Q_{i+n}^i a_{i+n-1}}{\mu_{i+n} Q_{i+n-1}^{i+1} a_{i+n} - \rho_{i+n-1} Q_{i+n}^{i+1} a_{i+n-1}}$$

et, par suite,

$$\text{(19)} \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - \frac{Q_{i+n-1}^i}{Q_{i+n-1}^{i+1}}\right)\left(\frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}} - \rho_{i+n-1} \frac{Q_{i+n}^{i+1}}{Q_{i+n-1}^{i+1}}\right) &= \frac{M_{i+1}^{i+n-1}}{\rho_i (Q_{i+n-1}^{i+1})^2} \\ &= -\frac{1}{\rho_i Q_{i+n-1}^{i+1} Q_{i+1}^{i+n-1}}, \end{aligned} \right.$$

ce qui constitue une relation directe entre les deux rapports $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ et $\frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}}$.

Enfin, la relation (13) donne, en supposant

$$i < j < k < l < m < \ldots < s < t < u,$$

$$Q^j_k a_i = Q^i_k a_j + M^k_i Q^j_i a_k$$

ou

$$Q^j_k a_i = Q^i_k a_j - M^k_j Q^i_j a_k,$$

et, par suite,

$$\frac{Q^j_k a_i}{a_j} = Q^i_k - M^k_j Q^i_j \frac{a_k}{a_j} = Q^i_k - \frac{M^k_j Q^i_j Q^k_l}{Q^k_l \dfrac{a_j}{a_k}}, \tag{20}$$

ce qui constitue le schéma d'un développement en fraction continue. On pourra donc écrire

$$Q^j_k \frac{a_i}{a_j} = Q^i_k - \cfrac{M^k_j Q^i_j Q^k_l}{Q^j_l - \cfrac{M^l_k Q^j_k Q^l_m}{Q^k_m - \cfrac{M^m_l Q^k_l Q^m_n}{Q^l_n - \cdots - Q^s_u - \cfrac{M^u_t Q^s_t}{\cfrac{a_t}{a_u}}}}},$$

ou, par une réduction facile,

$$\frac{1}{Q^i_j} \frac{a_i}{a_j} = \frac{Q^i_k}{Q^i_j Q^j_k} \dotplus \frac{\dfrac{1}{Q^k_j}}{\dfrac{Q^j_l}{Q^j_k Q^k_l}} \dotplus \frac{\dfrac{1}{Q^k_l Q^l_k}}{\dfrac{Q^k_m}{Q^k_l Q^l_m}} \dotplus \frac{\dfrac{1}{Q^l_m Q^m_l}}{\dfrac{Q^l_n}{Q^l_m Q^m_n}} \dotplus \ldots \dotplus \frac{\dfrac{1}{Q^s_t Q^t_s}}{\dfrac{Q^s_u}{Q^s_t Q^t_u}} \dotplus \frac{1}{Q^u_t \dfrac{a_t}{a_u}}.$$

Mais les formules connues

$$\rho_i Q^j_{i+1} a_i = \mu_{i+1} Q^j_i a_{i+1} - a_j,$$

$$a_t = \mu_u Q^t_{u-1} a_u - \rho_{u-1} Q^t_u a_{u-1}$$

permettent d'exprimer $\frac{a_i}{a_j}$ en fonction de $\frac{a_i}{a_{i+1}}$, de même que $\frac{a_t}{a_u}$ en fonction de $\frac{a_{u-1}}{a_u}$.

On obtiendra donc un développement exprimant $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ en fonction de $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et dans lequel, seuls, les termes intermédiaires $a_j$, $a_k$, $a_l$, $a_m$, ...., $a_s$, $a_t$ auront été envisagés.

Cette formule sera très utile dans le cas où il existera une relation simple entre ces différents termes, car on pourra grouper, en quelque sorte, un certain nombre de fractions partielles successives dans le développement général de la fraction continue considérée.

**17.** Les formules établies précédemment vont nous permettre de démontrer un théorème de la théorie des nombres.

Considérons les formules récurrentes dans lesquelles nous supposons que les $\rho_i$, $\lambda_i$, $\mu_i$ sont des entiers quelconques :

$$\begin{aligned}
\rho_{i+n} Q^i_{i+n+1} &= \lambda_{i+n} Q^i_{i+n} - \mu_{i+n} Q^i_{i+n-1},\\
\rho_{i+n-1} Q^i_{i+n} &= \lambda_{i+n-1} Q^i_{i+n-1} - \mu_{i+n-1} Q^i_{i+n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\rho_{i+2} Q^i_{i+3} &= \lambda_{i+2} Q^i_{i+2} - \mu_{i+2} Q^i_{i+1},\\
\rho_{i+1} Q^i_{i+2} &= \lambda_{i+1} Q^i_{i+1}.
\end{aligned}$$

Soient de même les relations

$$\begin{aligned}
\rho_k Q^k_{k+n+1} &= \lambda_{k+1} Q^{k+1}_{k+n+1} - \mu_{k+2} Q^{k+2}_{k+n+1},\\
\rho_{k+1} Q^{k+1}_{k+n+1} &= \lambda_{k+2} Q^{k+2}_{k+n+1} - \mu_{k+3} Q^{k+3}_{k+n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\rho_{k+n-2} Q^{k+n-2}_{k+n+1} &= \lambda_{k+n-1} Q^{k+n-1}_{k+n+1} - \mu_{k+n} Q^{k+n}_{k+n+1},\\
\rho_{k+n-1} Q^{k+n-1}_{k+n+1} &= \lambda_{k+n} Q^{k+n}_{k+n+1}
\end{aligned}$$

Si nous avons les égalités

$$\begin{aligned}
\rho_\alpha &= \rho_\beta &\quad \text{avec} \quad \alpha + \beta &= i + n + k = \sigma - 1,\\
\lambda_{\alpha'} &= \lambda_{\beta'} &\quad \text{avec} \quad \alpha' + \beta' &= i + n + k + 1 = \sigma,\\
\mu_{\alpha''} &= \mu_{\beta''} &\quad \text{avec} \quad \alpha'' + \beta'' &= i + n + k + 2 = \sigma + 1,
\end{aligned}$$

il est clair que l'on aura

$$\frac{Q^i_{i+n+1}}{Q^i_{i+1}} = \frac{Q^k_{k+n+1}}{Q^{k+n}_{k+n+1}}$$

ou

$$\rho_i Q^i_{i+n+1} = \rho_{k+n} Q^k_{k+n+1},$$

ou, plus simplement,

$$Q^i_{i+n+1} = Q^k_{k+n+1},$$

puisque, par hypothèse,

$$\rho_i = \rho_{k+n}.$$

Plus généralement, on verrait que

$$Q^\gamma_\delta = Q^{\gamma'}_{\delta'}$$

si

$$\gamma + \delta' = \gamma' + \delta = i + n + k + 1 = \sigma.$$

En particulier, la formule (8) deviendra

$$Q^i_{i+2n+1} = \mu_{i+n+1} Q^i_{i+n} Q^{i+n+1}_{i+2n+1} - \rho_{i+n} Q^i_{i+n+1} Q^{i+n}_{i+2n+1},$$

et, si dans les relations précédentes on suppose

$$k = i + n,$$

d'où

$$\sigma = 2i + 2n + 1,$$

on aura

$$Q^i_{i+n} = Q^{i+n+1}_{i+2n+1}, \qquad Q^i_{i+n+1} = Q^{i+n}_{i+2n+1}$$

et, par suite,

$$Q^i_{i+2n+1} = \mu_{i+n+1} (Q^i_{i+n})^2 - \rho_{i+n} (Q^i_{i+n+1})^2.$$

En reproduisant le raisonnement indiqué par Serret dans son article du Tome 13 du *Journal de Liouville*, on arrivera à démontrer que tout diviseur d'un nombre de la forme $a^2 - \rho b^2$ est, sous certaines restrictions, également de cette forme.

La formule (8) peut s'écrire également

$$Q^i_{i+2n} = \mu_{i+n+1} Q^i_{i+n} Q^{i+n+1}_{i+2n} - \rho_{i+n} Q^i_{i+n+1} Q^{i+n}_{i+2n}.$$

Si dans les relations ci-dessus on suppose

$$k = i + n - 1,$$

d'où

$$\sigma = 2i + 2n,$$

on aura

$$Q^i_{i+n} = Q^{i+n}_{i+2n}, \qquad Q^{i+n+1}_{i+2n} = Q^i_{i+n-1},$$

d'où

$$Q^i_{i+2n} = Q^i_{i+n}(\mu_{i+n+1} Q^i_{i+n-1} - \rho_{i+n} Q^i_{i+n+1});$$

d'où cette conséquence que $Q^i_{i+n}$ est un diviseur de $Q^i_{i+2n}$.

# CHAPITRE II.

## CONDITIONS GÉNÉRALES DE CONVERGENCE.

**18.** Nous allons examiner en détail le cas où le reste $a_n$ ne devient jamais identiquement nul et nous étudierons les conditions de convergence de la fraction continue illimitée ainsi obtenue.

Dans un paragraphe précédent nous avons établi la formule (17) qui, pour $i = 0$, devient

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{Q^0_n}{Q^1_n} \qquad \text{avec} \qquad a_n = 0 \qquad (n \text{ fini}).$$

Nous allons chercher tout d'abord si cette relation subsiste lorsque, la fraction continue étant illimitée, $a_n$ tend vers zéro pour $n = \infty$; il nous faut pour cela déterminer les conditions de convergence de la fraction $\frac{Q^0_n}{Q^1_n}$ ou réduite pour $n = \infty$.

La relation (12) nous donne

$$Q^0_{n-1} Q^1_n - Q^0_n Q^1_{n-1} = \frac{M^{n-1}_1}{\rho_0 \rho_{n-1}} = \frac{M^n_0}{\mu_1 \mu_n},$$

d'où, en divisant par $Q^1_{n-1}Q^1_n$,

$$\begin{aligned}
\frac{Q^0_{n-1}}{Q^1_{n-1}} - \frac{Q^0_n}{Q^1_n} &= \frac{M_1^{n-1}}{\rho_0\rho_{n-1}Q^1_{n-1}Q^1_n},\\
\frac{Q^0_{n-2}}{Q^1_{n-2}} - \frac{Q^0_{n-1}}{Q^1_{n-1}} &= \frac{M_1^{n-2}}{\rho_0\rho_{n-2}Q^1_{n-2}Q^1_{n-1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{Q^0_2}{Q^1_2} - \frac{Q^0_3}{Q^1_3} &= \frac{M_1^2}{\rho_0\rho_2 Q^1_2 Q^1_3},\\
\frac{Q^0_2}{Q^1_2} &= \frac{\lambda_1}{\rho_0},
\end{aligned}$$

d'où, en additionnant ces égalités,

$$(21)\qquad -\rho_0\frac{Q^0_n}{Q^1_n} = \lambda_1 + \frac{M_1^2}{\rho_2 Q^1_2 Q^1_3} + \frac{M_1^3}{\rho_3 Q^1_3 Q^1_4} + \cdots + \frac{M_1^{n-2}}{\rho_{n-2}Q^1_{n-2}Q^1_{n-1}} + \frac{M_1^{n-1}}{\rho_{n-1}Q^1_{n-1}Q^1_n}.$$

Lorsque $n$ augmente indéfiniment, le polynome du second membre devient une série et, d'après un théorème bien connu de Cauchy, cette série sera convergente si la limite supérieure, pour $n=\infty$, de

$$\sqrt[n]{\frac{|M_1^n|}{|\rho_n Q^1_n Q^1_{n+1}|}}$$

est inférieure à l'unité.

En particulier, cette condition sera évidemment remplie si, $\overline{m}^{-2}$ étant la limite supérieure de $\left|\frac{\mu_n}{\rho_{n-1}}\right|$ pour $n=\infty$, nous avons l'inégalité

$$\text{lim. inf. } \sqrt[n]{|Q^1_n|} > \overline{m}.$$

C'est là un résultat simple dont on pourra souvent faire usage.

Il est, d'ailleurs, possible de généraliser cette condition, car la relation (11) donne

$$Q^0_{(n-1)k+i}Q^1_{nk+i} - Q^1_{(n-1)k+i}Q^0_{nk+i} = \frac{M_1^{nk+i}}{\rho_0}\,Q^{nk+i}_{(n-1)k+i},$$

d'où

$$\frac{Q^0_{(n-1)k+i}}{Q^1_{(n-1)k+i}} - \frac{Q^0_{nk+i}}{Q^1_{nk+i}} = \frac{M_1^{nk+i}Q^{nk+i}_{(n-1)k+i}}{\rho_0 Q^1_{(n-1)k+i}Q^1_{nk+i}}$$

et l'on voit aisément que la série représentative de $\frac{Q^0_{nk+i}}{Q^1_{nk+i}}$ pour $n = \infty$ sera convergente si la limite supérieure de $\sqrt[n]{\frac{|M_1^{nk+i} Q^{nk+i}_{(n-1)k+i}|}{|\rho_0 Q^1_{(n-1)k+i} Q^1_{nk+i}|}}$ est inférieure à l'unité. En particulier, cette condition sera évidemment remplie si, pour $n = \infty$, la limite inférieure de $\sqrt[nk]{|Q^1_{nk+i}|}$ est supérieure à $\overline{m}$.

Il est clair, d'ailleurs, que dans ce cas nous aurons seulement démontré la convergence de $\frac{Q^0_{nk+i}}{Q^1_{nk+i}}$ pour $n = \infty$; la limite de $\frac{Q^0_{nk+i}}{Q^1_{nk+j}}$ avec $j \not\equiv i \pmod{k}$ pourra ne pas exister ou avoir une valeur différente de celle trouvée précédemment.

Mais, même dans le cas où $\frac{Q^0_n}{Q^1_n}$ aurait, pour $n = \infty$, une limite unique et bien déterminée, celle-ci ne serait pas nécessairement égale à $\frac{a_0}{a_1}$, comme une généralisation hâtive de la formule (17) permettrait de le supposer. En effet, la relation (10) donne

$$a_0 Q^1_n - a_1 Q^0_n = \frac{1}{\rho_0} M^n_1 a_n,$$

d'où

$$\frac{a_0}{a_1} - \frac{Q^1_n}{Q^1_n} = \Delta_n = \frac{1}{\rho_0} \frac{M^n_1 a_n}{a_1 Q^1_n} = - \frac{a_n}{\rho_0 a_1 Q^n_1} \tag{22}$$

et l'on voit immédiatement que $\Delta_n$ ne tend vers zéro que si $a_n$ est infiniment petit par rapport à $Q^n_1$. Or nous savons que $\frac{a_0}{a_1}$ et $\frac{Q^0_n}{Q^1_n}$ (pour $n = \infty$) ont le même développement *illimité* en fraction continue; nous avons donc ici un premier exemple de deux quantités pouvant différer entre elles et donnant cependant naissance au même développement illimité; ce fait ne doit, d'ailleurs, pas nous surprendre, car les deux racines $(x', x'')$, en principe différentes, de l'équation du second degré $x^2 - ax + b = 0$ donnent évidemment naissance au même développement

$$(x', x'') = a \dot{-} \frac{b}{a} \dot{-} \frac{b}{a} \dot{-} \frac{b}{a} \dot{-} \cdots.$$

Quoi qu'il en soit, si, en outre de la condition ci-dessus admise

$$\text{lim. inf.} \sqrt[n]{|Q_n^1|} > \overline{m},$$

nous avons également

$$\text{lim. inf.} \sqrt{\left|\frac{a_1}{a_n}\right|} > \overline{m},$$

il est clair que nous aurons $\lim \Delta_n = 0$ et $\frac{a_0}{a_1} = \lim \frac{Q_n^0}{Q_n^1}$.

Au lieu de considérer le critère de convergence de Cauchy, nous aurions pu faire intervenir celui de d'Alembert relatif au quotient de deux termes successifs : soit

$$\frac{M_1^{k-1}}{\rho_{k-1} Q_{k-1}^1 Q_k^1} : \frac{M_1^k}{\rho_k Q_k^1 Q_{k+1}^1} = \frac{\rho_k Q_{k+1}^1}{\mu_k Q_{k-1}^1}.$$

Si la limite inférieure, pour $k = \infty$, du module de cette expression est supérieure à l'unité, il est clair que $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ aura une limite, mais celle-ci ne sera égale à $\frac{a_0}{a_1}$ que dans certaines conditions, par exemple si la limite supérieure de $\left|\frac{\mu_{k+1} a_{k+1}}{\rho_{k-1} a_{k-1}}\right|$, pour $k = \infty$, est inférieure à l'unité.

Posons, en effet, suivant que $k$ est pair ou impair,

$$Q_\alpha^0 = Q_1^0 = -\frac{1}{\rho_0} \qquad \text{et} \qquad a_\alpha = a_1,$$

ou

$$Q_\alpha^0 = Q_2^0 = -\frac{\lambda_1}{\rho_0 \rho_1} \qquad \text{et} \qquad a_\alpha = a_2 \qquad \text{avec} \qquad |a_2| < \left|\frac{\rho_0 a_0}{\mu_2}\right|.$$

On aura, en vertu des hypothèses faites,

$$|Q_{k+1}^1| > (1+\varepsilon)^{\frac{k+1-\alpha}{2}} \left|\frac{\mu_k}{\rho_k} \frac{\mu_{k-2}}{\rho_{k-2}} \frac{\mu_{k-4}}{\rho_{k-4}} \cdots \frac{\mu_{\alpha+1}}{\rho_{\alpha+1}} Q_\alpha^1\right|,$$

$$|a_{k+1}| < \frac{|a_\alpha|}{(1+\varepsilon)^{\frac{k+1-\alpha}{2}} \left|\frac{\mu_{k+1}}{\rho_{k-1}} \frac{\mu_{k-1}}{\rho_{k-3}} \cdots \frac{\mu_{\alpha+2}}{\rho_\alpha}\right|},$$

d'où

$$\left|\frac{a_{k+1}}{Q_{k+1}^1}\right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^{k+1-\alpha}} \left|\frac{a_\alpha}{M_\alpha^{k+1} Q_\alpha^1}\right|.$$

Pour $\alpha = 1$, on a

$$\left|\frac{a_{k+1}}{Q_{k+1}^1}\right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^k}\left|\frac{\rho_0 a_1}{M_1^{k+1}}\right|.$$

Pour $\alpha = 2$, il vient également

$$\left|\frac{a_{k+1}}{Q_{k+1}^1}\right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^{k-1}}\left|\frac{\rho_0\rho_1 a_2}{\lambda_1 M_2^{k+1}}\right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^k}\left|\frac{\rho_0^2 a_0}{\lambda_1 M_1^{k+1}}\right|;$$

dans les deux cas on voit, d'après (22), que $\Delta_n$ tend vers zéro.

La formule (21) peut également s'écrire

$$-\rho_0\frac{Q_n^0}{Q_n^1} = \frac{M_1^{n-1}}{\rho_{n-1}Q_{n-1}^1 Q_n^1} + \frac{M_1^{n-2}}{\rho_{n-2}Q_{n-2}^1 Q_{n-1}^1} + \ldots + \frac{M^2}{\rho_2 Q_2^1 Q_3^1} + \lambda_1.$$

Le second membre devient une série, lorsque $n$ augmente indéfiniment et en divisant par le premier terme tous les termes de cette série, on obtiendra comme terme général,

$$\frac{\rho_{n-1}Q_{n-1}^1 Q_n^1}{\rho_{n-k}M_{n-k}^{n-1}Q_{n-k}^1 Q_{n-k+1}^1}.$$

On pourra, comme précédemment, étudier les conditions de convergence de cette série S. En particulier, si $\underline{m}^2$ est la limite inférieure de $\left|\frac{\mu_n}{\rho_{n-1}}\right|$, pour $n=\infty$, et si $\sqrt[n]{|Q_n^1|}$ tend régulièrement vers sa limite $|u|$, il est clair que la série S sera convergente si $|u| < \underline{m}$.

On arriverait à une conclusion analogue par la considération du critère de d'Alembert; le rapport de deux termes est ici égal à $\frac{\mu_k Q_{k-1}^1}{\rho_k Q_{k+1}^1}$, soit à l'inverse de celui trouvé précédemment : si, pour $k=\infty$, la limite inférieure du module de ce rapport est supérieure à l'unité, la série S sera évidemment convergente.

Dans ce cas, on pourra écrire

$$\lim\left(-\rho_0\frac{Q_n^0}{Q_n^1}\right) = \lim\left(\frac{M_1^{n-1}}{\rho_{n-1}Q_{n-1}^1 Q_n^1}\right)\times S;$$

d'où

$$\lim(-Q_n^0 Q_{n-1}^1) = S \times \lim\left(\frac{M_1^{n-1}}{\rho_0\rho_{n-1}}\right).$$

Or, nous avons

$$\lim(Q^0_{n-1}Q^1_n - Q^0_n Q^1_{n-1}) = \lim\left(\frac{M^{n-1}_1}{\rho_0\rho_{n-1}}\right),$$

d'où, par soustraction,

$$\lim(Q^0_{n-1}Q^1_n) = (1 - S)\lim\left(\frac{M^{n-1}_1}{\rho_0\rho_{n-1}}\right),$$

et, par suite,

$$\lim\frac{Q^0_n}{Q^1_n} = \frac{S}{S-1}\lim\frac{Q^0_{n-1}}{Q^1_{n-1}} \qquad \text{ou} \qquad \lim\frac{Q^0_n}{Q^0_{n-1}} = \frac{S}{S-1}\lim\frac{Q^1_n}{Q^1_{n-1}};$$

d'où l'on tire

$$(23) \qquad \lim\sqrt[n]{\frac{Q^0_n}{Q^1_n}} = \lim\sqrt[n]{\frac{Q^0_n}{Q^0_{n-1}}} = \frac{S}{S-1}.$$

**19.** Dans le paragraphe **16**, nous avons établi la formule

$$(18) \qquad \mu_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho_n\frac{Q^1_{n+1}}{Q^1_n} \qquad \text{avec} \qquad a_1 = 0.$$

Nous allons également chercher si cette relation subsiste lorsque $\frac{a_1}{a_n}$ diminue indéfiniment pour $n = \infty$ et dans ce but nous allons étudier les conditions de convergence de $\rho_n\frac{Q^1_{n+1}}{Q^1_n}$ pour $n = \infty$.

La relation (12) donne

$$Q^1_n Q^2_{n+1} - Q^1_{n+1}Q^2_n = \frac{M^n_2}{\rho_1\rho_n},$$

d'où, en divisant par $Q^1_n Q^2_n$,

$$\frac{Q^2_{n+1}}{Q^2_n} - \frac{Q^1_{n+1}}{Q^1_n} = \frac{M^n_2}{\rho_1\rho_n Q^1_n Q^2_n},$$

et, par suite,

$$\frac{Q^3_{n+1}}{Q^3_n} - \frac{Q^2_{n+1}}{Q^2_n} = \frac{M^n_3}{\rho_2\rho_n Q^2_n Q^3_n},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{Q^{n-1}_{n+1}}{Q^{n-1}_n} - \frac{Q^{n-2}_{n+1}}{Q^{n-2}_n} = \frac{M^n_{n-1}}{\rho_{n-2}\rho_n Q^{n-2}_n Q^{n-1}_n},$$

$$\frac{Q^{n-1}_{n+1}}{Q^{n-1}_n} = \frac{\lambda_n}{\rho_n};$$

d'où, en additionnant,

$$(24)\qquad -\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} = \lambda_n + \frac{M_{n-1}^n}{\rho_{n-2} Q_n^{n-2} Q_n^{n-1}} + \ldots + \frac{M_3^n}{\rho_2 Q_n^2 Q_n^3} + \frac{M_2^n}{\rho_1 Q_n^1 Q_n^2},$$

et nous pouvons, comme précédemment, rechercher les conditions de convergence de la série que le second membre devient pour $n = \infty$.

Nous aurons à considérer la limite supérieure pour $k$ et $n$ infinis de $\sqrt[k]{\left|\frac{M_{n+1}^{n+k}}{\rho_n Q_{n+k}^n Q_{n+k}^{n+1}}\right|}$; si cette limite est inférieure à l'unité, la série sera convergente et $\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ aura une limite; mais cette limite ne sera pas nécessairement égale à celle de $\mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, comme une généralisation hâtive de la formule (18) permettrait de le supposer : nous avons, en effet, d'après (4),

$$a_1 = \mu_{n+1} Q_n^1 a_{n+1} - \rho_n Q_{n+1}^1 a_n,$$

d'où

$$(25)\qquad \mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} = \delta_n = \frac{a_1}{a_n Q_n^1}$$

et $\delta_n$ ne tend vers zéro que si $\left|\frac{a_n Q_n^1}{a_1}\right|$ augmente indéfiniment avec $n$.

Or, nous savons que $\mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ et $\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ ont, pour $n = \infty$, le même développement illimité en fraction continue; nous avons donc un nouvel exemple de deux quantités pouvant être différentes et donnant cependant naissance au même développement illimité.

Quoi qu'il en soit, la série (24) sera convergente si l'on a

$$\text{lim. inf.} (k = \infty) \sqrt[k]{|Q_{n+k}^n|} > \overline{m};$$

il en sera de même si le module du rapport d'un terme quelconque $\frac{M_{k+1}^n}{\rho_k Q_n^k Q_n^{k+1}}$ au suivant $\frac{M_k^n}{\rho_{k-1} Q_n^{k-1} Q_n^k}$ soit $\left|\frac{\rho_{k-1} Q_n^{k-1}}{\mu_{k+1} Q_n^{k+1}}\right|$ a, pour $k = \infty$, une limite inférieure supérieure à l'unité; le rapport $\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ aura, pour $n = \infty$, une limite, mais celle-ci ne sera égale à celle de $\mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ que

dans certaines conditions si, par exemple, le module de $\frac{\mu_{k+1} a_{k+1}}{\rho_{k-1} a_{k-1}}$ a, pour $k = \infty$, une limite inférieure plus grande que l'unité, comme un calcul élémentaire permettrait de le démontrer.

La relation (24) peut également s'écrire

$$-\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} = \frac{M_2^n}{\rho_1 Q_n^1 Q_n^2} + \frac{M_3^n}{\rho_2 Q_n^2 Q_n^3} + \ldots + \frac{M_{n-1}^n}{\rho_{n-2} Q_n^{n-2} Q_n^{n-1}} + \lambda_n.$$

Le rapport d'un terme au suivant est égal à $\frac{\mu_{k+1} Q_n^{k+1}}{\rho_{k-1} Q_n^{k-1}}$, soit l'inverse de celui trouvé précédemment; si, pour $k = \infty$, le module de ce rapport a une limite inférieure plus grande que l'unité, le second membre sera, à la limite, égal au produit du premier terme par une série convergente S'. On aura donc

$$\lim\left(-\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}\right) = S' \times \lim\left(\frac{M_2^n}{\rho_1 Q_n^1 Q_n^2}\right),$$

et, en tenant compte de

$$\lim(Q_n^1 Q_{n+1}^2 - Q_{n+1}^1 Q_n^2) = \lim\left(\frac{M_2^n}{\rho_1 \rho_n}\right),$$

il vient

$$\lim(-Q_{n+1}^1 Q_n^2) = S' \times \lim\left(\frac{M_2^n}{\rho_1 \rho_i}\right),$$

d'où l'on tire, comme précédemment,

$$\lim \sqrt[n]{\frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}} = \lim \sqrt{\frac{Q_n^1}{Q_n^2}} = \frac{S'}{S' - 1},$$

relation tout à fait analogue à la formule (23).

Rappelons enfin la formule (20), qui résume en quelque sorte les résultats que nous venons d'obtenir :

$$\left(\frac{a_0}{a_1} - \frac{Q_n^0}{Q_n^1}\right)\left(\mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}\right) = \Delta_n \delta_n = \frac{M_1^n}{\rho_0 (Q_n^1)^2}.$$

Nous voyons immédiatement que, si

$$\lim \inf. \sqrt[n]{|Q_n^1|} > m,$$

l'un au moins des deux facteurs $\Delta_n$ ou $\delta_n$ tendra vers zéro ; si, au contraire, l'on a

$$\text{lim sup.} \sqrt[n]{|Q_n^1|} < \overline{m},$$

l'un au moins de ces deux facteurs augmentera indéfiniment.

**20.** Jusqu'à présent nous avons étudié exclusivement les conditions de convergence de $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ et de $\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ pour $n = \infty$ ; mais nous arriverons à des résultats plus précis par la considération des restes $a_i$.

Rappelons la formule (10),

$$a_1 = \rho_n M_1^{n+1}(Q_1^{n+1} a_n - Q_1^n a_{n+1}),$$

$$\frac{1}{\rho_n M_1^{n+1}} \frac{a_1}{a_n a_{n+1}} = \frac{Q_1^{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{Q_1^n}{a_n},$$

d'où

$$\frac{1}{\rho_{n-1} M_1^n} \frac{a_1}{a_{n-1} a_n} = \frac{Q_1^n}{a_n} - \frac{Q^{n-1}}{a_{n-1}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{1}{\rho_2 M_1^3} \frac{a_1}{a_2 a_3} = \frac{Q_1^3}{a_3} - \frac{Q_1^2}{a_2},$$

$$\frac{1}{\rho_1 M_1^2} \frac{a_1}{a_1 a_2} = \frac{Q_1^2}{a_2},$$

et en additionnant

$$(26) \quad \frac{Q_1^{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_1}{M_1^{n+1}} \left[ \frac{1}{\rho_n a_n a_{n+1}} + \frac{M_n^{n+1}}{\rho_{n-1} a_{n-1} a_n} + \frac{M_{n-1}^{n+1}}{\rho_{n-2} a_{n-2} a_{n-1}} + \dots + \frac{M_2^{n+1}}{\rho_1 a_1 a_2} \right].$$

Lorsque $n$ augmente indéfiniment, la parenthèse du second membre devient une série et, d'après le critère de Cauchy, cette série sera convergente si la limite supérieure de $\sqrt[n]{\left| \frac{M_{k+1}^{n+k+1} a_{n+k} a_{n+k+1}}{\rho_k a_k a_{k+1}} \right|}$ est inférieure à l'unité.

En particulier, cette condition sera remplie si l'on a

$$\text{lim. inf.} (n = \infty) \sqrt[n]{\left| \frac{a_k}{a_{n+k}} \right|} > m.$$

Considérons de même le rapport d'un terme au suivant, soit $\frac{\rho_{k-1} a_{k-1}}{\mu_{k+1} a_{k+1}}$,

et admettons que le module de cette expression ait pour limite inférieure un nombre $\sigma > 1$; il est clair que le second membre sera dans ce cas le produit du premier terme par une série convergente $\Sigma$.

On aura donc, en chassant les dénominateurs,

$$\lim(\rho_n \mathrm{M}_1^{n+1} a_n \mathrm{Q}_1^{n+1}) = \lim(-\rho_n \mathrm{Q}_{n+1}^1 a_n) = a_1 \Sigma.$$

En retranchant de la relation (10), rappelée plus haut, il vient

$$\lim(\rho_n \mathrm{M}_1^{n+1} \mathrm{Q}_1^n a_{n+1}) = \lim(-\mu_{n+1} \mathrm{Q}_n^1 a_{n+1}) = a_1(\Sigma - 1).$$

La formule (22) donne d'ailleurs

$$\Delta_{n+1} = \frac{\mathrm{M}_1^{n+1} a_{n+1}}{\rho_0 a_1 \mathrm{Q}_{n+1}^1};$$

d'où, en tenant compte de l'égalité ci-dessus,

$$\lim \Delta_{n+1} = \lim\left(-\frac{\rho_n \mathrm{M}_1^{n+1} a_n a_{n+1}}{\rho_0 a_1^2 \Sigma}\right).$$

Or, de l'hypothèse

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}\right| < \frac{1}{\sigma}\left|\frac{\rho_{k-1}}{\mu_{k+1}}\right|,$$

on tire immédiatement

$$\left|\frac{a_n a_{n+1}}{a_0 a_1}\right| < \frac{1}{\sigma^n}\left|\frac{\mu_1}{\rho_n \mathrm{M}_1^{n+1}}\right|;$$

d'où, en substituant,

$$\lim|\Delta_{n+1}| < \frac{1}{\sigma^n}\left|\frac{\mu_1 a_0}{\rho_0 a_1 \Sigma}\right|,$$

ce qui prouve que, en général, sauf le cas exceptionnel où $\Sigma = 0$, la différence $|\Delta_{n+1}|$ décroît au moins aussi vite que le terme de rang $n$ d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{\sigma} < 1$; donc $\Delta_n$ a pour limite zéro et $\frac{\mathrm{Q}_n^0}{\mathrm{Q}_n^1}$ a pour limite $\frac{a_0}{a_1}$.

Nous allons démontrer que dans ce même cas $\delta_n$ aura également une limite, mais en général $\neq 0$.

La formule (25) donne en effet

$$\delta_n = \frac{a_1}{a_n Q_n^1}$$

et, en tenant compte des relations ci-dessus,

$$\lim \delta_n = \lim \frac{\mu_{n+1} a_{n+1} Q_n^1}{(1-\Sigma) a_n Q_n^1} = \lim \frac{1}{1-\Sigma} \frac{\mu_{n+1} a_{n+1}}{a_n};$$

d'où, en remplaçant $\delta_n$ par sa valeur,

$$\lim \rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} = \frac{\Sigma}{\Sigma - 1} \lim \frac{\mu_{n+1} a_{n+1}}{a_n},$$

ce qui démontre bien la propriété annoncée.

**21.** Admettons maintenant que le module de $\frac{\rho_{k-1} a_{k-1}}{\mu_{k+1} a_{k+1}}$ ait pour $k = \infty$ une limite inférieure supérieure à un nombre $\sigma > 2$.

Dans ces conditions, il est clair que le module de la série entre parenthèses (26) sera supérieur à

$$\left|\frac{1}{\rho_n a_n a_{n+1}}\right| \left(1 - \frac{\frac{1}{\sigma}}{1 - \frac{1}{\sigma}}\right) = \frac{\sigma - 2}{\sigma - 1} \left|\frac{1}{\rho_n a_n a_{n+1}}\right|$$

et inférieur à

$$\left|\frac{1}{\rho_n a_n a_{n+1}}\right| \left(\frac{\frac{1}{\sigma}}{1 - \frac{1}{\sigma}}\right) = \frac{\sigma}{\sigma - 1} \left|\frac{1}{\rho_n a_n a_{n+1}}\right|.$$

On aura donc

$$\frac{\sigma - 2}{\sigma - 1} \left|\frac{1}{\rho_n a_n a_{n+1}}\right| < \left|\frac{M_1^{n+1} Q_1^{n+1}}{a_1 a_{n+1}}\right| = \left|\frac{Q_{n+1}^1}{a_1 a_{n+1}}\right| < \frac{\sigma}{\sigma - 1} \left|\frac{1}{\rho_n a_n a_{n+1}}\right|,$$

d'où en chassant les dénominateurs

$$(27) \qquad \frac{\sigma - 2}{\sigma - 1} |a_1| < |\rho_n a_n Q_{n+1}^1| < \frac{\sigma}{\sigma - 1} |a_1|.$$

D'ailleurs, en vertu de l'hypothèse admise

$$|a_{n+2}| < \frac{1}{\sigma}\left|\frac{\rho_n a_n}{\mu_{n+2}}\right|,$$

d'où en multipliant

$$|a_{n+1} Q_{n+1}^1| < \frac{1}{\sigma - 1}\left|\frac{a_1}{\mu_{n+2}}\right|.$$

Or nous avons

$$\Delta_n = \frac{M_1^n a_n}{\rho_0 a_1 Q_n^1}, \qquad \Delta_{n+1} = \frac{M_1^{n+1} a_n}{\rho_0 a_1 Q_{n+1}^1},$$

d'où

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = \frac{\rho_n a_n Q_{n+1}^1}{\mu_{n+1} a_{n+1} Q_n^1},$$

et, en tenant compte des relations ci-dessus,

(28) $$\left|\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}\right| > \sigma - 2;$$

c'est là une propriété caractéristique de l'approximation obtenue avec les réduites successives.

Il existe deux cas généraux dans lesquels la condition ci-dessus

$$\text{lim. inf.}\left|\frac{\rho_{k-1} a_{k-1}}{\mu_{k+1} a_{k+1}}\right| > \sigma > 2$$

se trouve réalisée.

En premier lieu, si l'on réduit selon le procédé ordinaire un nombre incommensurable en fraction continue en posant $\rho_n = \mu_n = 1$ et en prenant pour $\lambda_n$ l'entier réel ou complexe le plus rapproché de la fraction $\frac{a_{n-1}}{a_n}$, on aura [1] :

$$\sigma > 5 \quad \text{dans le domaine réel,}$$

$$\sigma > 3 \quad \text{dans le domaine complexe.}$$

Dès lors, dans ce cas, les réduites ont toujours une limite précisément égale au nombre incommensurable donné.

En second lieu, si l'on considère une fraction continue de la forme

---

(1) *Voir* Auric, Note précitée, p. 399 et 426.

normale (C) (§ 5), les restes successifs $a_k$ ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la variable auront leur degré maximum qui ira constamment en diminuant. Si, par exemple, $a_{k-1}$ est de degré maximum $\delta$, $a_{k+1}$ sera de degré $\delta - 2i$ et, comme $\rho_k = 1$, $\mu_k = x^{2i-m-1}$, il en résulte que le rapport $\frac{\rho_{k-1}a_{k-1}}{\mu_{k+1}a_{k+1}}$ sera, en général, de degré $m+1$ ($m \geqq 0$). On pourra donc déterminer une valeur de la variable $x$, soit $x_0$, telle que, pour $|x| > |x_0|$, le rapport ci-dessus ait un module supérieur à un nombre positif quelconque fixé d'avance.

Dès lors la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ aura, pour $n=\infty$, une limite égale à $\frac{a_0}{a_1}$; en d'autres termes, la fraction continue (C) est, en général, toujours convergente pour $|x|$ suffisamment grand.

La conclusion précédente tombe en défaut lorsque le module de $\lambda_n$ tend vers zéro; nous verrons, en effet, que dans ce cas la fraction continue possède, sur tout le plan complexe, deux déterminations dont nous donnerons l'expression algébrique.

**22.** Considérons la formule (26); on peut l'écrire

$$\frac{Q_1^{n+1}}{a_1 a_{n+1}} = \frac{1}{\mu_2 a_1 a_2} + \frac{1}{M_1^3 \rho_2 a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{M_1^{n+1} \rho_n a_n a_{n+1}}.$$

Pour étudier les conditions de convergence de la série que devient le second membre pour $n=\infty$, nous aurons à considérer la limite inférieure de $\sqrt[n]{|M_1^{n+1} \rho_n a_n a_{n+1}|}$ et la série sera convergente si cette limite est $>1$.

En particulier, cette condition sera remplie si l'on a

$$\lim \inf. \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{\underline{m}}.$$

De même le rapport d'un terme au suivant est égal à $\frac{\mu_{k+1}a_{k+1}}{\rho_{k-1}a_{k-1}}$, c'est-à-dire l'inverse de celui considéré précédemment; si le module de ce rapport a une limite inférieure $>1$, il est clair que le second membre sera une série convergente $\Sigma'$. On aura donc

$$\lim(Q_1^{n+1}) = a_1 \Sigma' \lim(a_{n+1}).$$

Or,

$$\Delta_{n+1} = -\frac{a_{n+1}}{\rho_0 a_1 Q_1^{n+1}},$$

d'où en substituant

$$\lim \Delta_{n+1} = -\frac{1}{\rho_0 a_1^2 \Sigma'}.$$

Il en résulte immédiatement que la limite de $\Delta_{n+1}$ est, en général, $\neq 0$, et, par conséquent, que la limite de $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ est, en général, différente de $\frac{a_0}{a_1}$.

Nous allons démontrer que dans cette même hypothèse $\delta_n$ tend vers zéro.

Nous avons, en effet,

$$\lim \delta_n = \lim \frac{a_1}{a_n Q_n^1} \frac{Q_1^{n+1}}{a_1 \Sigma' a_{n+1}} = \lim \left( -\frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} \frac{1}{M_1^{n+1} a_n a_{n+1} \Sigma'} \right).$$

En vertu de l'hypothèse admise nous avons

$$\left| \frac{1}{M_1^{n+1} a_n a_{n+1}} \right| < \frac{1}{\sigma^n} \left| \frac{\rho_n}{\rho_0 a_0 a_1} \right|, \qquad \sigma > 1,$$

d'où

$$\lim |\delta_n| < \frac{1}{\sigma^n} \left| \rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} \frac{1}{\rho_0 a_0 a_1 \Sigma'} \right|,$$

ce qui démontre la propriété annoncée.

Nous allons résumer sommairement les résultats ci-dessus :

(A) $$\lim.\sup. \left| \frac{\mu_{k+1} a_{k+1}}{\rho_{k-1} a_{k-1}} \right| < 1.$$

Dans ce cas la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ a une limite qui est, en général, égale à $\frac{a_0}{a_1}$; par contre, $\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ a une limite généralement différente de celle de $\mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(B) $$\lim.\inf. \left| \frac{\mu_{k+1} a_{k+1}}{\rho_{k-1} a_{k-1}} \right| > 1.$$

Dans ce cas la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ a une limite qui est, en général, différente de $\frac{a_0}{a_1}$; par contre, $\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ a une limite généralement égale à celle de $\mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Il en résulte que la fraction continue $\left(\frac{a_0}{a_1}\right)$ ou la fraction continue renversée $\left(\frac{\mu_{n+1} a_{n+1}}{a_n}\right)$ est, en général, susceptible de deux déterminations distinctes.

(C) Dans les cas intermédiaires, les séries considérées ci-dessus deviennent, en général, divergentes et l'étude de la fraction continue devra être faite au moyen des méthodes développées dans les Chapitres suivants.

Nous pouvons toutefois obtenir un résultat intéressant dans le cas où le rapport $\frac{\mu_{k+1} a_{k+1}}{\rho_{k-1} a_{k-1}}$ tend régulièrement pour $k = \infty$ vers sa limite $e^{2\theta i}$, si, en outre, l'on admet que $\frac{a_k}{a_{k+1}}$ tend régulièrement vers sa limite.

Posons, en effet,

$$\lim \frac{\mu_{k+1}}{\rho_{k-1}} = m^2,$$

d'où

$$\lim \frac{a_{k-1}}{a_k} = m e^{-\theta i}.$$

Or, la relation

$$\rho_{k-1} a_{k-1} = \lambda_k a_k - \mu_{k+1} a_{k+1}$$

donne

$$\lambda_k = \frac{\rho_{k-1} a_{k-1}}{a_k} + \frac{\mu_{k+1} a_{k+1}}{a_k},$$

et, par suite,

$$\lim \lambda_k = m \rho_{k-1} (e^{-\theta i} + e^{\theta i}) = 2\sqrt{\mu_{k+1} \rho_{k-1}} \cos\theta.$$

Nous voyons donc que, dans ces conditions, le rapport $\frac{\lambda_k}{\sqrt{\rho_{k-1} \mu_{k+1}}}$ a pour limite, pour $k = \infty$, un nombre réel compris entre $-2$ et $+2$.

**25.** Nous pouvons, dans un cas particulier, établir une proposition qui est, en quelque sorte, la réciproque de la précédente.

Considérons la relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = \lambda_n Q_n^0 - Q_{n-1}^0,$$

dans laquelle nous avons posé

$$\rho_n = \mu_n = 1.$$

Cette relation peut s'écrire

$$\frac{Q_{n+1}^0}{Q_n^0} = \lambda_n - \frac{1}{\frac{Q_n^0}{Q_{n-1}^0}}.$$

Admettons que l'on ait

$$|\lambda_n| > 2(1+\varepsilon), \qquad \left|\frac{Q_n^0}{Q_{n-1}^0}\right| > 1+\varepsilon,$$

on en conclura immédiatement

$$\left|\frac{Q_{n+1}^0}{Q_n^0}\right| > 1+\varepsilon.$$

Or, nous avons

$$\left|\frac{Q_2^0}{Q_1^0}\right| = |\lambda_1| > 2(1+\varepsilon).$$

La proposition étant vraie pour $n=1$ se trouve dès lors démontrée d'une manière générale.

Nous pouvons donc écrire

$$\lim\inf. \sqrt[n]{|Q_n^0|} > 1+\varepsilon,$$

et, en vertu des résultats établis au paragraphe **18**, nous sommes assuré de la convergence de la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ pour $n=\infty$.

Posons maintenant

$$\lambda_n = a_n + ib_n, \qquad \frac{Q_n^0}{Q_{n-1}^0} = c_n + id_n.$$

Il viendra

$$\frac{Q_{n+1}^0}{Q_n^0} = c_{n+1} + id_{n+1} = a_n + ib_n - \frac{1}{c_n + id_n} = a_n + ib_n - \frac{c_n - id_n}{c_n^2 + d_n^2},$$

d'où

$$d_{n+1} = b_n + \frac{d_n}{c_n^2 + d_n^2}.$$

Il résulte de cette relation que, si tous les $b_n$ ont le même signe et si $d_n$ possède ce signe, il en sera de même de $d_{n+1}$ et l'on aura, en outre,

$$|d_{n+1}| > |b_n|.$$

En posant

$$c_n^2 + d_n^2 = \tau_n^2,$$

nous aurons la formule

$$d_{n+1} = b_n + \frac{b_{n-1}}{\tau_n^2} + \frac{b_{n-2}}{\tau_n^2 \tau_{n-1}^2} + \frac{b_{n-3}}{\tau_n^2 \tau_{n-1}^2 \tau_{n-2}^2} + \ldots.$$

Je dis que, si la série $\Sigma |b_n|$ a une somme $S > 1$, il est impossible d'avoir

$$\text{lim. sup. } \tau_n \leqq 1,$$

car on aurait évidemment

$$|d_{n+1}| \geqq \Sigma |b_n| = S > 1,$$

et, par suite,

$$\tau_{n+1} > |d_{n+1}| > 1,$$

ce qui implique contradiction.

En admettant donc que $\tau_n$ tende régulièrement vers sa limite nous pourrons écrire

$$\text{lim. inf. } \sqrt[n]{|Q_n^0|} > 1,$$

et, dès lors, la convergence de $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ pour $n = \infty$ est assurée sous les conditions énoncées précédemment.

En combinant les deux résultats que nous venons d'obtenir et en remarquant que les $k$ premiers termes ($k$ fini) d'une fraction continue sont sans influence sur la convergence de celle-ci, nous pouvons établir la proposition suivante :

*Si dans une région du plan complexe les $\lambda_n$ sont tels qu'ils satis-*

*fassent, pour $n > k$, à l'une des deux conditions suivantes :*

$$(a) \qquad |\lambda_n| > 2,$$

$$(b) \qquad \lambda_n = \alpha_n + i\varepsilon_n \qquad (\alpha_n \text{ réel}),$$

*$\varepsilon_n$ pouvant être très petit, mais ayant un signe constant avec $|\Sigma\varepsilon_n| > 1$, la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ sera convergente dans cette région.*

Par conséquent, si $\lambda_n$ tend régulièrement vers sa limite, il est aisé d'en conclure que la réduite sera partout convergente, sauf sur les points pour lesquels on aura

$$\lim \lambda_n = \beta,$$

$\beta$ étant un nombre réel, compris entre $-2$ et $+2$.

C'est, dans un cas particulier ($\rho_n = \mu_n = 1$), la réciproque de la propriété démontrée à la fin du paragraphe précédent. Nous arrivons ainsi d'une manière élémentaire à la notion de coupure qui sera étudiée plus en détail dans les Chapitres suivants.

Remarquons en terminant que le développement général (15)

$$\frac{\rho_0 a_0}{a_1} = \lambda_1 \dot{-} \frac{\rho_1\mu_2}{\lambda_2} \dot{-} \frac{\rho_2\mu_3}{\lambda_3} \dot{-} \frac{\rho_3\mu_4}{\mu_4} \dot{-} \cdots$$

se ramène dans deux cas particuliers à la forme de développement étudiée ci-dessus.

1° Si $\rho_{i-1} = \mu_{i+1}$, on obtient

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{\lambda_1}{\rho_0} \dot{-} \frac{1}{\frac{\lambda_2}{\rho_1}} \dot{-} \frac{1}{\frac{\lambda_3}{\rho_3}} \dot{-} \frac{1}{\frac{\lambda_4}{\rho_3}} \dot{-} \cdots,$$

ce qui était évident *a priori*.

2° Si $\rho_i = \mu_i$, on aura

$$\frac{\rho_0 a_0}{\rho_1 a_1} = \frac{\lambda_1}{\rho_1} \dot{-} \frac{1}{\frac{\lambda_2}{\rho_2}} \dot{-} \frac{1}{\frac{\lambda_3}{\rho_3}} \dot{-} \frac{1}{\frac{\lambda_4}{\rho_4}} \dot{-} \cdots,$$

et les conclusions précédentes s'appliquent immédiatement.

## CHAPITRE III.

### LES FRACTIONS CONTINUES MÉROMORPHES ET QUASI-MÉROMORPHES.

**24.** Considérons, comme dans le paragraphe 5, la fraction continue

$$\frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 \dot{-} \frac{1}{\lambda_2} \dot{-} \frac{1}{\lambda_3} \dot{-} \frac{1}{\lambda_4} \dot{-} \dots,$$

dans laquelle les $\lambda_n$ sont :

*a.* Ou des polynomes en $x$ de la forme

$$\lambda_n = \alpha_n x^j + \beta_n x^{j-1} + \dots + \nu_n y^{1-j};$$

*b.* Ou des polynomes en $y = \sqrt{x}$ de la forme

$$\lambda_n = \alpha_n y^{2j+1} + \beta_n y^{2j-1} + \dots + \nu_n y^{1-2j}.$$

Nous admettrons que la série $\sum_1^\infty |\lambda_n|$ est uniformément convergente dans un certain domaine et nous allons étudier les conditions de convergence de $\frac{S_0}{S_1}$.

Rappelons la relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = \lambda_n Q_n^0 - Q_{n-1}^0,$$

et considérons les symboles $\mathfrak{Q}_n^0$ définis par la relation

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 = |\lambda_n| \mathfrak{Q}_n^0 + \mathfrak{Q}_{n-1}^0 \qquad \text{avec} \qquad \mathfrak{Q}_0^0 = 0, \quad \mathfrak{Q}_1^0 = 1.$$

Il est clair que $\mathfrak{Q}_n^0$ sera une fonction majorante de $Q_n^0$ et l'on pourra écrire avec M. Poincaré ([1])

$$|Q_n^0| \ll \mathfrak{Q}_n^0.$$

([1]) La fonction majorante est réalisée effectivement lorsque tous les $\lambda_n$ sont réels et alternativement de signe contraire.

Or, les conditions de convergence de $\mathfrak{Q}_n^0$ (pour $n = \infty$) sont faciles à établir [1] : nous avons, en effet,

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 + \mathfrak{Q}_n^0 < (1 + |\lambda_n|)(\mathfrak{Q}_n^0 + \mathfrak{Q}_{n-1}^0),$$

d'où

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 < \mathfrak{Q}_{n+1}^0 + \mathfrak{Q}_n^0 < \prod_1^n (1 + |\lambda_i|).$$

En posant

$$\sum_1^\infty |\lambda_i| = S,$$

on aura évidemment

(29) $$\lim |Q_n^0| < \lim \mathfrak{Q}_n^0 < e^S.$$

D'autre part, la formule récurrente

$$Q_{n+1}^0 + Q_{n-1}^0 = \lambda_n Q_n^0$$

donne par l'addition de $k$ égalités successives

$$Q_{n-1}^0 - (-1)^k Q_{n-1+2k}^0 = \sum_1^{k-1} (-1)^i \lambda_{n+2i} Q_{n+2i}^0.$$

Grâce à la convergence de la série $\sum_1^\infty |\lambda_n|$ et à la limitation du module de $Q_{n+2i}^0$, cette égalité permet de démontrer la convergence uniforme dans le domaine considéré de $(-1)^n Q_{2n}^0$ [de même que celle de $(-1)^n Q_{2n+1}^0$].

Posons [2]

$$P_0 = \lim (-1)^n Q_{2n}^0, \qquad I_0 = \lim (-1)^n Q_{2n+1}^0,$$

ces deux fonctions seront, selon l'expression de M. Maillet, des fonc-

---

(1) STERN, *Journal de Crelle*, t. 37. — STIELTJES, *Op. cit.*, p. 39.

(2) P (initiale de pair), I (initiale de impair) pour indiquer la parité de l'indice inférieur qui croît indéfiniment.

tions quasi-entières aux deux points essentiels o et $\infty$ et, comme $\lambda_n$ est de degré maximum $j$ en $x$ (ou $2j+1$ en $y$) et $j-1$ en $\frac{1}{x}\left(\text{ou } 2j-1\right.$ en $\left.\frac{1}{y}\right)$, on verra directement, en appliquant le théorème de M. Hadamard, que l'ordre apparent et, par suite, le genre de $P_0$ et de $I_0$ sont, au plus, égaux aux degrés maxima ci-dessus.

On démontrera de même que les symboles $(-1)^n Q^1_{2n}$ et $(-1)^n Q^1_{2n+1}$ ont, comme limites pour $n=\infty$, deux fonctions quasi-entières $P_1$ et $I_1$.

La relation

$$Q^0_{2n}Q^1_{2n+1}-Q^0_{2n+1}Q^1_{2n}=M_1^{2n}=1$$

donnera à la limite

$$P_0 I_1 - P_1 I_0 = 1,$$

ce qui prouve que les fonctions $P_0$, $P_1$ (comme $P_0$, $I_0$) ne peuvent avoir aucun diviseur commun.

Les réduites $\frac{Q^0_{2n}}{Q^1_{2n}}$, $\frac{Q^0_{2n+1}}{Q^1_{2n+1}}$ ont donc comme limites deux fonctions quasi-méromorphes, $\frac{P_0}{P_1}$, $\frac{I_0}{I_1}$, lesquelles sont essentiellement distinctes sur tout le plan complexe, car

$$\left|\frac{Q^0_{2n}}{Q^1_{2n}}-\frac{Q^0_{2n+1}}{Q^1_{2n+1}}\right|=\left|\frac{1}{Q^1_{2n}Q^1_{2n+1}}\right|>\frac{1}{\mathfrak{Q}^1_{2n}\mathfrak{Q}^1_{2n+1}}>4e^{-2S},$$

puisque

$$\mathfrak{Q}^1_{2n}+\mathfrak{Q}^1_{2n+1}<e^S$$

et cette inégalité subsiste évidemment à la limite.

Dans ce cas, on dit communément que la fraction continue est *oscillante* (1), expression qui, à notre avis, n'est pas exacte, car nous avons seulement démontré que les réduites de même parité tendent vers une limite bien déterminée; nous allons voir qu'en faisant une restriction, d'ailleurs bien naturelle, on peut dire que la fraction continue possède, en général, deux valeurs bien déterminées.

---

(1) STIELTJES, *op. cit.*, p. 39 et 40.

D'après la formule (4),

$$S_0 = Q_n^0 S_{n+1} - Q_{n+1}^0 S_n, \qquad S_1 = Q_n^1 S_{n+1} - Q_{n+1}^1 S_n,$$

d'où

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{Q_n^0 - Q_{n+1}^0 \frac{S_n}{S_{n+1}}}{Q_n^1 - Q_{n+1}^1 \frac{S_n}{S_{n+1}}},$$

on peut considérer la fraction $\frac{S_0}{S_1}$ comme la limite d'une suite de fractions continues périodiques mixtes dont les $n$ premiers termes sont les mêmes que ceux de $\frac{S_0}{S_1}$, le $n^{\text{ième}}$ se répétant uniformément à l'infini et formant à lui seul la période; il est clair qu'à la limite on pourra écrire

$$\lim \frac{S_n}{S_{n+1}} = \lambda_n - \frac{1}{\lim \frac{S_n}{S_{n+1}}} \qquad \text{avec} \qquad \lim \lambda_n = 0,$$

d'où

$$\lim \frac{S_n}{S_{n+1}} = \pm i, \qquad i = \sqrt{-1}$$

et, par suite,

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{P_0 \pm i I_0}{P_1 \pm i I_1} \quad (30)$$

([1]).

La fraction continue $Y = \frac{S_0}{S_1}$ satisfait donc à une équation du second degré

$$(P_1^2 + I_1^2) Y^2 - 2(P_0 P_1 + I_0 I_1) Y + P_0^2 + I_0^2 = 0. \quad (31)$$

On peut dire également qu'à la fraction continue correspond une substitution modulaire dans toute la région du plan complexe définie plus haut

$$Y = \frac{P_0 - I_0 Z}{P_1 - I_1 Z} \qquad \text{avec} \qquad P_0 I_1 - I_0 P_1 = 1.$$

---

[1] L'application du théorème de M. Poincaré dont il sera question au Chapitre suivant conduirait au même résultat.

On aurait obtenu de la même manière

$$S_m = Q_n^m S_{n+1} - Q_{n+1}^m S_n$$

et

$$\frac{S_0}{P_0 \pm i I_0} = \frac{S_1}{P_1 \pm i I_1} = \ldots = \frac{S_m}{P_m \pm i I_m},$$

$P_m$, $I_m$ étant, comme $P_0$, $I_0$, des fonctions quasi-entières satisfaisant à la relation

$$(32) \qquad P_0 I_m - P_m I_0 = - Q_m^0.$$

**25.** Maintenant admettons, comme précédemment, que $\lim |\lambda_n| = 0$ et soit $m$ l'exposant de convergence de la série $\sum_1 |\lambda_n|$; par hypothèse, $\sum_1^\infty |\lambda_n|^{m+\varepsilon}$ converge et $\sum_1^\infty |\lambda_n|^{m-\varepsilon}$ diverge et, selon que $\sum_1^\infty |\lambda_n|^m$ converge ou diverge, $m$ est appelé l'*exposant de convergence par excès ou par défaut.*

Nous avons toujours l'inégalité fondamentale

$$|Q_{n+1}^0| < \mathfrak{Q}_{n+1}^0 < \prod_1^n (1 + |\lambda_i|) < e^{\sum_1^n L(1+|\lambda_i|)}.$$

Soit $\rho$ le plus petit entier tel que la série $\sum_1 |\lambda_n|^{\rho+1}$ converge, nous pourrons écrire, avec M. Lindelöf [1],

$$|L(1 + |\lambda_i|)| < \frac{|\lambda_i|}{1} - \frac{|\lambda_i|^2}{2} + \ldots + (-1)^{\rho-1} \frac{|\lambda_i|^\rho}{\rho} + A |\lambda_i|^\tau,$$

$\tau$ étant un nombre quelconque compris entre $\rho$ et $\rho + 1$ et A une constante qui se détermine aisément quand $\tau$ est donné.

En posant

$$P_{n+1}^0 = Q_{n+1}^0 e^{\sum_1^n \frac{|\lambda_i|}{1} - \frac{|\lambda_i|^2}{2} + \ldots + (-1)^{\rho-1} \frac{|\lambda_i|^\rho}{\rho}} = Q_{n+1}^0 \prod_1^n u_i,$$

(1) BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 52.

on aura

$$|P^0_{n+1}| < e^{A\sum_1^n |\lambda_i|^\tau},$$

d'où, en passant à la limite et en faisant $\tau = m + \varepsilon$ ou $\tau = m$ si ce dernier est l'exposant par excès, on aura

$$\lim |P^0_n| < e^{A\sum_1^\infty |\lambda_i|^{m+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon = 0 \text{ dans la dernière hypothèse}).$$

Cette inégalité limite supérieurement l'ordre apparent et, par suite, le genre de $P^0_n (n = \infty)$, dont nous allons démontrer la convergence uniforme pour des valeurs de $n$ de même parité, augmentant indéfiniment.

En remplaçant, dans $Q^0_{n+1} = \lambda_n Q^0_n - Q^0_{n-1}$, $Q^0_n$ par son expression en valeur de $P^0_n$, il vient

$$P^0_{n+1} = \lambda_n u_n P^0_n - u_{n-1} u_n P^0_{n-1},$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} |P^0_{n+1}| + |u_n P^0_n| &< |u_n|(1 + |\lambda_n|)(|P^0_n| + |u_{n-1} P^0_{n-1}|) \\ &< \prod_1^n |u_i|(1 + |\lambda_i|). \end{aligned}$$

Je dis que la série $\sum_1^\infty \big| |u_n|(1 + |\lambda_n|) - 1 \big|$ est convergente, car on a, à partir d'une valeur finie de $n$,

$$|u_n|(1 + |\lambda_n|) < e^{A|\lambda_n|^\tau} < 1 + KA|\lambda_n|^\tau.$$

En conséquence, nous nous trouvons dans le cas examiné plus haut et l'on démontrera que, selon la parité de $n$, $P^0_n$ tend uniformément vers deux limites $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{J}_0$, qui sont deux fonctions quasi-entières dont l'ordre apparent et le genre sont au plus égaux aux degrés maxima des $\lambda_n$ multipliés par $m$, exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |\lambda_n|$;

dans le cas où cet exposant est inférieur à l'unité, nous obtenons un résultat plus précis que celui établi dans le paragraphe précédent.

De même on démontrera que $P_n^1$ tend uniformément pour $n=\infty$ et selon la parité de $n$ vers deux fonctions quasi-entières $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{I}_1$ de même nature que $\mathfrak{P}_0$ et $\mathfrak{I}_0$.

En remplaçant les $Q_n^0$ par leur valeur dans

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{Q_n^0 - Q_{n+1}^0 \frac{S_n}{S_{n+1}}}{Q_n^1 - Q_{n+1}^1 \frac{S_n}{S_{n+1}}},$$

il vient

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{1}{u_1} \frac{P_n^0 u_n - P_{n+1}^0 \frac{S_n}{S_{n+1}}}{P_n^1 u_n - P_{n+1}^1 \frac{S_n}{S_{n+1}}},$$

d'où, en passant à la limite et observant que

$$\lim u_n = 1, \qquad \lim \frac{S_n}{S_{n+1}} = \pm i,$$

on aura

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{1}{u_1} \frac{\mathfrak{P}_0 \pm i\mathfrak{I}_0}{\mathfrak{P}_1 \pm i\mathfrak{I}_1}.$$

De la relation

$$Q_n^0 Q_{n+1}^1 - Q_{n+1}^0 Q_n^1 = 1$$

on tire, en passant à la limite,

$$\mathfrak{P}_0 \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_0 \mathfrak{P}_1 = e^{\varphi},$$

$\varphi$ étant un polynome en $x$ et $\frac{1}{x}$ dont les degrés maxima sont au plus égaux aux genres de $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, .... Dès lors, en faisant rentrer cette exponentielle, de même que le facteur $u_1$, dans la composition de ces fonctions quasi-entières, on pourra écrire comme précédemment

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{P_0 \pm i I_0}{P_1 \pm i I_1} \qquad \text{avec} \qquad P_0 I_1 - I_0 P_1 = 1.$$

Cette proposition pourrait d'ailleurs se généraliser dans le cas où $m$ ne serait pas un nombre fini; on serait alors conduit à des fonc-

tions quasi-entières, d'ordre apparent infiniment grand ou infiniment petit, auxquelles on pourrait faire application des résultats obtenus par MM. Borel, Maillet, Boutroux, etc. Nous n'insisterons pas sur cet ordre de recherches, notre but étant simplement d'établir ce théorème fondamental que, lorsque $|\lambda_n|$ tend uniformément vers zéro pour $n=\infty$, la fraction continue représente formellement deux fonctions quasi-méromorphes dont l'ordre apparent a une limite supérieure égale au produit de l'exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |\lambda_n|$ par le degré maximum de $\lambda_n$.

**25**$^{bis}$. Considérons deux polynomes entiers U, V, premiers entre eux; on sait qu'il est possible de déterminer deux autres polynomes de degrés inférieurs aux précédents et tels que l'on ait

$$SU - RV = 1.$$

Peut-on étendre ce théorème aux fonctions entières ou quasi-entières? Nous allons voir par les résultats précédents que cette généralisation n'est possible que dans les cas où sont réalisées les conditions d'exception de M. Picard dans son théorème sur les fonctions méromorphes.

Considérons donc deux fonctions quasi-entières P, Q aux points essentiels o et $\infty$; en réduisant en fraction continue la fonction quasi-méromorphe $\frac{P}{Q}$, il est clair que nous aurons

$$\frac{P}{Q} = \frac{p_1\omega - p_2}{q_1\omega - q_2},$$

$p_1, p_2, q_1, q_2$ étant des fonctions quasi-entières satisfaisant à la relation

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1.$$

A. Dans le cas général, $\omega$ est une fonction quasi-méromorphe $\frac{F}{G}$; par suite, l'on pourra écrire

$$P = p_1 F - p_2 G, \qquad Q = q_1 F - q_2 G,$$

d'où l'on tire aussi

$$F = q_2 P - p_2 Q, \qquad G = p_1 Q - q_1 P;$$

par conséquent, en général, F et G auront des ordres apparents non inférieurs à ceux de P et de Q.

B. Admettons que $\omega$ soit une fonction quasi-entière F : nous nous trouvons dans le premier cas d'exception signalé par M. Picard; la fonction quasi-méromorphe $\frac{P}{Q}$ est équivalente (au sens de Dedekind) à la fonction quasi-entière F; on aura donc

$$\frac{P}{Q} = \frac{p_1 F - p_2}{q_1 F - q_2} \qquad \text{et} \qquad q_1 P - p_1 Q = 1.$$

Il est clair que $\frac{P}{Q}$ ne peut jamais devenir égal à $\frac{p_1}{q_1}$.

De même, si $\omega$ est égal à l'inverse d'une fonction quasi-entière $\frac{1}{G}$, on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{p_1 - p_2 G}{q_1 - q_2 G} \qquad \text{et} \qquad q_2 P - p_2 Q = 1.$$

$\frac{P}{Q}$ ne pourra jamais devenir égal à $\frac{p_2}{q_2}$.

C. Admettons enfin que $\omega$ soit une exponentielle $e^{\varphi}$; nous nous trouvons dans le second cas d'exception de M. Picard, puisque la fonction quasi-méromorphe $\frac{P}{Q}$ peut se mettre sous la forme $\frac{p_1 e^{\varphi} - p_2}{q_1 e^{\varphi} - q_2}$. On en tire

$$q_1 P - p_1 Q = -1, \qquad q_2 P - p_2 Q = e^{\varphi}$$

et, par suite, la fonction $\frac{P}{Q}$ ne devient jamais égale ni à $\frac{p_1}{q_1}$ ni à $\frac{p_2}{q_2}$.

On en conclut d'une manière générale que les équations exceptionnelles de M. Picard $\left(\frac{P}{Q} = \psi\right)$, si elles existent, seront obtenues par le développement de $\frac{P}{Q}$ en fraction continue; ce sont les solutions de ces équations qui permettront de généraliser le théorème sur les polynomes entiers rappelé au début.

**26.** Considérons la fraction continue

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 - \frac{\mu_2}{1} - \frac{\mu_3}{1} - \frac{\mu_4}{1} - \ldots$$

et admettons que la série $\sum_2^\infty |\mu_n|$ soit uniformément convergente dans un certain domaine.

Posons

$$\sum_2^\infty |\mu_n| = S.$$

La relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = Q_n^0 - \mu_n Q_{n-1}^0$$

conduit à la fonction majorante $\mathfrak{Q}_n^0$ définie par $\mathfrak{Q}_{n+1}^0 = \mathfrak{Q}_n^0 + |\mu_n| \mathfrak{Q}_{n-1}^0$ avec les conditions initiales $\mathfrak{Q}_0^0 = 0$, $\mathfrak{Q}_1^0 = 1$; d'où l'on tire

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 + |\mu_{n+1}| \mathfrak{Q}_n^0 < (1 + |\mu_{n+1}|)(\mathfrak{Q}_n^0 + |\mu_n| \mathfrak{Q}_{n-1}^0)$$

et, par suite,

$$|Q_{n+1}^0| < \mathfrak{Q}_{n+1}^0 < \prod_2^{n+1} (1 + |\mu_i|) < e^S.$$

Donc nos raisonnements restent les mêmes que ci-dessus et nous pouvons démontrer, grâce à la convergence uniforme de $\sum_2 |\mu_i|$ et à la limitation du module de $Q_n^0$, que $Q_n^0$ tend uniformément, pour $n = \infty$ [1], vers une fonction quasi-entière $q_0$ dont l'ordre apparent dépend du degré de $\mu_i$ et de l'exposant de convergence de $\sum_2^\infty |\mu_i|$.

On démontrera de même que $Q_n^1$ tend vers une fonction quasi-

---

[1] On a, en effet, quelle que soit la parité de $k$,

$$Q_{n+k}^0 - Q_n^0 = -\sum_0^{k-1} \mu_{n+i} Q_{n+i-1}^0.$$

entière $q_1$ et, par suite, la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ aura pour limite une fonction quasi-méromorphe $\frac{q_0}{q_1}$.

Le résultat que nous venons d'obtenir se complète immédiatement dans le cas où l'exposant de convergence de la série n'est plus un nombre fini, mais une quantité infiniment grande ou infiniment petite.

Considérons de même la fraction continue

$$\frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 \dot{-} \frac{1}{\lambda_2} \dot{-} \frac{1}{\lambda_3} \dot{-} \frac{1}{\lambda_4} \dot{-} \dots \qquad (\lim|\lambda_n| = \infty)$$

et admettons que la série $\sum^{\infty} \left|\frac{1}{\lambda_n}\right| = S$ soit uniformément convergente dans un certain domaine.

La fraction continue peut s'écrire

$$\frac{S_0}{\lambda_1 S_1} = 1 \dot{-} \frac{\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}}{1} \dot{-} \frac{\frac{1}{\lambda_2\lambda_3}}{1} \dot{-} \frac{\frac{1}{\lambda_3\lambda_4}}{1} \dot{-} \dots$$

et nous sommes ramené au cas précédent.

La relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = Q_n^0 - \frac{1}{\lambda_{n-1}\lambda_n} Q_{n-1}^0$$

conduit à une fonction majorante $\mathfrak{Q}_n^0$ pour laquelle on a

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 + \left|\frac{1}{\lambda_n}\right| \mathfrak{Q}_n^0 < \left(1 + \left|\frac{1}{\lambda_n}\right|\right)\left(\mathfrak{Q}_n^0 + \left|\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right| \mathfrak{Q}_{n-1}^0\right) < \prod^n \left(1 + \left|\frac{1}{\lambda_i}\right|\right),$$

d'où

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 < \mathfrak{Q}_{n+1}^0 + \left|\frac{1}{\lambda_n}\right| \mathfrak{Q}_n^0 < e^S.$$

Par suite, en observant que

$$Q_{n+k}^0 - Q_n^0 = -\sum_1^{k-1} \frac{1}{\lambda_{n+i-1}\lambda_{n+i}} Q_{n+i-1}^0$$

et que la convergence uniforme de la série $\sum \left|\frac{1}{\lambda_n}\right|$ entraîne celle de $\sum \left|\frac{1}{\lambda_{n-1}\lambda_n}\right|$, on pourra reproduire presque identiquement les raisonnements ci-dessus et l'on arrivera à démontrer, si $\frac{1}{\lambda_i}$ est un polynome entier en $x$ et $\frac{1}{x}$, que la fraction continue a pour limite une fonction quasi-méromorphe dont l'ordre apparent et, par conséquent, le genre ont une limite supérieure facile à déterminer.

Enfin, supposons que, dans la fraction continue

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 \,\dot{-}\, \frac{\mu_2}{1} \,\dot{-}\, \frac{\mu_3}{1} \,\dot{-}\, \ldots,$$

on ait

$$\lim \mu_n = \infty,$$

on pourra écrire cette fraction sous la forme

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 \,\dot{-}\, \frac{1}{\frac{1}{\mu_2}} \,\dot{-}\, \frac{1}{\frac{\mu_2}{\mu_3}} \,\dot{-}\, \frac{1}{\frac{\mu_3}{\mu_2\mu_4}} \,\dot{-}\, \frac{1}{\frac{\mu_2\mu_4}{\mu_3\mu_5}} \,\dot{-}\, \frac{1}{\frac{\mu_3\mu_5}{\mu_2\mu_4\mu_6}} \,\dot{-}\, \ldots.$$

Le produit de deux dénominateurs partiels successifs est égal à $\frac{1}{\mu_n}$ et tend vers zéro; donc l'un au moins de ces deux dénominateurs tend également vers zéro. Si tous ces dénominateurs tendent vers zéro, nous retombons sur le cas examiné précédemment; si un certain nombre de dénominateurs successifs tendent, les uns vers zéro, les autres vers une limite finie ou infinie, en groupant ces dénominateurs suivant la formule donnée au paragraphe **17**, on obtiendra une nouvelle fraction continue dont le dénominateur tendra, en général, vers une limite bien déterminée. L'étude de la convergence de ces fractions fera l'objet du Chapitre suivant.

**27.** Nous allons appliquer les résultats que nous venons d'obtenir à l'étude des fractions continues de Stieltjes.

Soit $\frac{S_0}{S_1} = \frac{\psi_0\left(\frac{1}{x}\right)}{\psi_1\left(\frac{1}{x}\right)}$ une fraction dont les termes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la variable $x$.

En posant $x = y^2$ nous avons la formule (F)

$$\frac{S_0}{y^{2i-1}S_1} = \alpha_1 y + \frac{1}{\alpha_2 y} + \frac{1}{\alpha_3 y} + \frac{1}{\alpha_4 y} + \dots$$

1° Supposons que $\lim \alpha_n = 0$; nous déterminerons comme précédemment des fonctions $P_0$, $I_0$, $P_1$, $I_1$ qui seront des fonctions entières de $y$ de la forme

$$P_0 = y\,Q_0(y^2), \qquad P_1 = R_1(y^2),$$
$$I_0 = T_0(y^2), \qquad I_1 = y\,T_1(y^2)$$

avec

$$P_0 I_1 - I_0 P_1 = x\,R_0(x)\,T_1(x) - R_1(x)\,T_0(x) = 1.$$

La fraction $\frac{S_0}{S_1}$ sera égale à la fonction méromorphe

$$(\sqrt{x})^{2i-1}\frac{\sqrt{x}\,R_0(x) \pm i\,R_1(x)}{T_0(x) \pm i\sqrt{x}\,T_1(x)} = x^{i-1}\frac{x\,R_0 \pm i\sqrt{x}\,R_1}{T_0 \pm i\sqrt{x}\,T_1}.$$

Sous cette forme on reconnaît immédiatement que la fraction continue représente formellement les deux racines d'une équation du second degré, l'origine étant précisément le point critique autour duquel se permutent les deux racines.

Si $m$ est l'exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |\alpha_n|$, l'ordre apparent de $R_0$, $R_1$, $T_0$, $T_1$, en $y$ sera au plus égal à $m$ et, par suite, l'ordre apparent en $x$ sera au plus égal à $\frac{m}{2}$.

En particulier, si $m < 2$, ces fonctions seront de genre zéro en $x$.

2° Supposons maintenant que $\lim \alpha_n = \infty$.

La fraction continue pourra s'écrire

$$\frac{S_0}{\alpha_1 S_1} = 1 + \frac{\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\frac{1}{x}}{1} + \frac{\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}\frac{1}{x}}{1} + \dots$$

Si $m$ est l'exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty \left|\frac{1}{\alpha_n \alpha_{n+1}}\right|$, nous savons que la fraction continue représentera une fonction méromorphe $\frac{q_0}{q_1}$ en $\frac{1}{x}$ dont l'ordre apparent sera au plus égal à $m$.

La fraction $\frac{S_0}{S_1}$ est donc égale à la fonction $\frac{q_0}{q_1}$ sur tout le plan complexe, sauf peut-être à l'origine qui est un point essentiel pour chacune des deux fonctions.

## CHAPITRE IV.

### LES FRACTIONS CONTINUES PÉRIODIQUES ET ASYMPTOTIQUEMENT PÉRIODIQUES.

**28.** Considérons tout d'abord la fraction périodique simple

$$Y = \lambda \dot{-} \frac{\mu^2}{\lambda} \dot{-} \frac{\mu^2}{\lambda} \dot{-} \frac{\mu^2}{\lambda} \dot{-} \ldots,$$

et posons

$$\lambda = z + \frac{\mu^2}{z},$$

Y satisfait visiblement à l'équation du deuxième degré

$$Y^2 = \left(z + \frac{\mu^2}{z}\right) Y - \mu^2,$$

dont les racines sont $z$ et $\frac{\mu^2}{z}$.

Nous allons démontrer que $Y = z$ si $|z| > |\mu|$ et $Y = \frac{\mu^2}{z}$ si $|z| < |\mu|$; en d'autres termes, que la fraction continue représente toujours la racine de plus grand module.

Pour $|z| = |\mu|$ les deux racines ont le même module et la fraction continue n'est pas convergente.

Dans le cas actuel la détermination explicite des symboles $Q_n^0$ se fait sans aucune difficulté.

La relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = \left(z + \frac{\mu^2}{z}\right) Q_n^0 - \mu^2 Q_{n-1}^0$$

a pour solution générale

$$Q_n^0 = A z^n + B\left(\frac{\mu^2}{z}\right)^n.$$

On a bien en effet

$$\left(z + \frac{\mu^2}{z}\right)\left[A z^n + B\left(\frac{\mu^2}{z}\right)^n\right]$$
$$= A z^{n+1} + B\left(\frac{\mu^2}{z}\right)^{n+1} + \mu^2\left[A z^{n-1} + B\left(\frac{\mu^2}{z}\right)^{n-1}\right],$$

ce qui est la vérification de la propriété annoncée.

Pour déterminer A et B nous poserons

$$Q_0^0 = 0 = A + B, \qquad \text{d'où} \qquad B = -A,$$
$$Q_1^0 = -1 = A z + B\frac{\mu^2}{z} = A\left(z - \frac{\mu^2}{z}\right),$$

d'où

$$A = -\frac{1}{z - \frac{\mu^2}{z}},$$

et, par suite,

$$(33) \qquad Q_n^0 = -\frac{z^n - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^n}{z - \frac{\mu^2}{z}},$$

formule qu'on peut d'ailleurs vérifier directement [1].

---

[1] D'une manière générale, si l'on a la fraction continue

$$Y = \alpha + \beta \dot{-} \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \dot{-} \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \dot{-} \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \dot{-} \ldots,$$

on aura

$$Q_n^0 = -\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

et l'on établira la formule générale de récurrence

$$Q_{n+k}^0 = (\alpha^k + \beta^k) Q_n^0 - \alpha^k \beta^k Q_{n-k}^0.$$

D'autre part, il est clair que

$$Q_n^1 = Q_{n-1}^0 = -\frac{z^{n-1} - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^{n-1}}{z - \frac{\mu^2}{z}},$$

d'où il vient

$$\frac{Q_n^0}{Q_n^1} = \frac{z^n - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^n}{z^{n-1} - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^{n-1}} = \mu \frac{\left(\frac{z}{\mu}\right)^n - \left(\frac{\mu}{z}\right)^n}{\left(\frac{z}{\mu}\right)^{n-1} - \left(\frac{\mu}{z}\right)^{n-1}}.$$

Lorsque $\left|\frac{z}{\mu}\right| > 1$, cette expression a évidemment pour limite $\mu\frac{z}{\mu} = z$; si, au contraire, on a $\left|\frac{z}{\mu}\right| < 1$, la valeur limite sera $\mu\frac{\mu}{z} = \frac{\mu^2}{z}$.

Dans le cas intermédiaire, si l'on pose $z = \mu e^{\theta i}$, il viendra

$$\frac{Q_n^0}{Q_n^1} = \mu \frac{e^{n\theta i} - e^{-n\theta i}}{e^{(n-1)\theta i} - e^{-(n-1)\theta i}} = \mu \frac{\sin n\theta}{\sin(n-1)\theta},$$

expression qui, en général, n'a pas de limite bien déterminée pour $n = \infty$.

**29.** En appelant Y' la racine conjuguée de Y on aura

$$Y' = \frac{\mu^2}{Y} = \left(\frac{\mu^2 Q_n^1}{Q_n^0}\right)_{n=\infty}.$$

Il viendra donc

$$Y' = \mu^2 \frac{z^{n-1} - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^{n-1}}{z^n - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^n} = \mu^2 \frac{z^{2n-1} - \mu^{2n-2} z}{z^{2n} - \mu^{2n}}.$$

Les racines du dénominateur sont

$$a_k = \mu e^{\frac{2k\pi i}{2n}} = \mu e^{\frac{k\pi i}{n}} = \mu e^{\theta_k i}.$$

Nous allons décomposer Y' en une somme de fractions simples

$$Y' = \mu^2 \sum_1^{2n} \frac{M_k}{z - a_k}.$$

En utilisant le théorème de Lagrange on trouve facilement

$$Y' = \mu^2 \sum_1^{2n} \frac{1 - \mu^{2n-2} a_k^{2-2n}}{2n(z - a_k)} = \sum_1^{2n} \frac{\mu^2(1 - e^{2\theta_k i})}{2n(z - \mu e^{\theta_k i})}.$$

Si nous remarquons que $\frac{1}{2n} = \frac{\Delta\theta_k}{2\pi}$, il viendra

$$Y' = \sum_1^{2n} \frac{\mu^2(1 - e^{2\theta_k i})\Delta\theta_k}{2\pi(z - \mu e^{\theta_k i})},$$

d'où, en passant à la limite,

$$(34) \qquad Y' = \int_0^{2\pi} \frac{\mu^2(1 - e^{2\theta i})}{2\pi(z - \mu e^{\theta i})} d\theta.$$

Telle est la formule fondamentale qui permet de mettre une fraction continue périodique simple sous la forme d'une intégrale définie à coupure.

Dans le cas actuel, la coupure est représentée par l'équation

$$z - \mu e^{\theta i} = 0,$$

dans laquelle $\theta$ varie de 0 à $2\pi$.

A cette équation correspondent, en posant $z = x + yi$, une ou plusieurs courbes ou portions de courbes le long desquelles $Y'$ est indéterminée : sur ces courbes également les deux racines que la fraction continue peut représenter ont même module ; partout ailleurs la fraction continue est convergente.

La formule (34) devient, en posant $e^{\theta i} = u$,

$$Y' = \int_0^{2\pi} \frac{\mu^2(e^{-\theta i} - e^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta}{2\pi(z - \mu e^{\theta i})} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\mu^2\left(\frac{1}{u} - u\right)}{z - \mu u} du$$

ou

$$Y' = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\mu\left(\frac{1}{u} - u\right)}{\frac{z}{\mu} - u} du,$$

et sous cette forme on reconnaît immédiatement l'analogie avec les intégrales de Stieltjes.

**50.** Comme premier exemple considérons le cas simple $\mu = 1$. Il résulte de ce qui précède que la fraction continue Y représente $\frac{1}{z}$ à l'intérieur du cercle de rayon *un*, décrit de l'origine comme centre et $z$ à l'extérieur de ce même cercle.

Nous sommes en présence d'une ligne singulière fermée et de deux domaines distincts de représentation à chacun desquels correspond l'intégrale

$$Y = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{1}{u} - u}{z - u}\,du,$$

C est ici le cercle de rayon *un*.

La formule ci-dessus met en évidence une remarque bien connue et rappelée par M. Borel (¹).

Si, sur un contour fermé, on se donne au hasard une succession de valeurs, soit $p(s) + iq(s)$, en prenant l'arc $s$ du contour comme variable indépendante, $p$ et $q$ admettant pour période la longueur totale du contour, l'intégrale

$$J = \int_C \frac{1}{2\pi i}\,\frac{p + iq}{z - x}\,dz$$

ne prendra pas sur C la succession des valeurs de $p + iq$.

J définit, en dedans et en dehors du contour C, deux fonctions holomorphes qui tendent uniformément sur C vers deux variétés infinies de valeurs et la différence de ces valeurs, en chaque point du contour, est précisément égale à $p + iq$.

La vérification de ce théorème sur l'exemple qui précède se fait immédiatement.

La formule (33)

$$Q_n^0 = \frac{1}{z^{n-1}}\,\frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1},$$

(¹) *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 3.

nous montre que les zéros de $Q_n^0$ sont également répartis sur la circonférence de rayon *un* à l'exception des points $z = \pm 1$ pour lesquels on a $Q_n^0 = \pm n$. Il en sera de même à la limite, ce qui montre que la coupure est une ligne continue de zéros de : $\lim Q_n^0 = 0$.

**31.** Nous allons poser maintenant $z = e^{\alpha i}$.

Dans ce cas la fraction continue Y devient

$$Y = 2\cos\alpha \dotplus \frac{1}{2\cos\alpha} \dotplus \frac{1}{2\cos\alpha} \dotplus \ldots,$$

ce qui donne

$$Y^2 = 2\cos\alpha\, Y - 1,$$

dont les racines sont

$$e^{\alpha i} \quad \text{et} \quad e^{-\alpha i}.$$

Pour $|z| = 1$, $\alpha$ est une quantité réelle quelconque : la ligne singulière est donc ici l'axe des abscisses. Au-dessus de cet axe $\alpha = \beta + \gamma i$, $\gamma > 0$, d'où

$$e^{\alpha i} = e^{-\gamma} e^{\beta i}, \qquad e^{-\alpha i} = e^{\gamma} e^{-\beta i},$$

et, comme Y représente la racine du plus grand module, nous aurons

$$Y = e^{-\alpha i} \quad \text{au-dessus de l'axe des abscisses}$$

et

$$Y = e^{\alpha i} \quad \text{au-dessous de ce même axe.}$$

La formule (34) devient ici

$$Y' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - e^{2\theta i}}{e^{\alpha i} - e^{\theta i}}\, d\theta$$

ou

$$Y' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\frac{\theta - \alpha}{2}} \sin\theta}{\sin\frac{\theta - \alpha}{2}}\, d\theta.$$

Les zéros de $Q_n^0 = 0$ sont également répartis sur l'axe des $x$ à l'exception des points $x = \pm k\pi$.

Posons maintenant

$$\cos\alpha = x,$$

d'où

$$Y = 2x \dot{-} \frac{1}{2x} \dot{-} \frac{1}{2x} \dot{-} \frac{1}{2x} \dot{-} \ldots,$$

d'où

$$Y^2 = 2xY - 1,$$

dont les racines sont

$$Y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} = x \pm i\sqrt{1 - x^2}.$$

D'après ce qui précède on voit aisément que la coupure se réduit ici au segment de l'axe des abscisses compris entre $-1$ et $+1$.

Il est clair également qu'au-dessus de la coupure, il faudra prendre le signe $+$ devant le radical et le signe $-$ au-dessous.

Les zéros de $Q_n^0 = 0$ qui, précédemment, étaient également répartis sur la circonférence se projettent sur le diamètre formant coupure avec une densité inversement proportionnelle à l'ordonnée du point représentatif; en d'autres termes, il y a infiniment plus de zéros près des extrémités du segment que près du milieu.

Nous savons qu'en dehors de la coupure, Y ne possède aucun point singulier; nous pouvons donc appliquer l'intégrale de Cauchy à un contour infiniment mince entourant le segment $-1\ldots+1$ et parcouru dans le sens inverse (sens des aiguilles d'une montre) puisque le domaine de représentation est à l'extérieur du contour.

Nous aurons donc

$$Y = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{+1} \frac{2i\sqrt{1-x^2}}{x - z}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-z}\,dx.$$

En adoptant le langage de Stieltjes on peut dire qu'à la fraction Y correspond une répartition continue de masse sur le segment $-1\ldots+1$, la densité en chaque point étant proportionnelle à l'ordonnée de la circonférence décrite sur ce segment comme diamètre.

Considérons enfin la fraction continue

$$Y = 2\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \dot{-} \frac{1}{2\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}} \dot{-} \frac{1}{2\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}} \dot{-} \ldots,$$

dans laquelle $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ est une fraction rationnelle quelconque que nous mettrons, en posant $z = x + yi$, sous la forme

$$\frac{A + Bi}{C + Di} = \frac{AC + BD - i(AD - BC)}{C^2 + D^2}.$$

Il résulte de ce qui précède que Y sera partout convergente et bien déterminée sauf sur les courbes ou portions de courbes pour lesquelles on aura $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = t$, $t$ étant une quantité réelle comprise entre $-1$ et $+1$; on aura pour déterminer ces courbes

$$AD - BC = 0, \qquad AC + BD = t(C^2 + D^2),$$

d'où

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D} = t = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

L'équation analytique de la coupure est

$$AD - BC = 0,$$

mais une ou plusieurs parties de cette courbe seulement constituent les coupures proprement dites; ce sont celles rencontrées par les courbes

$$A - tC = 0, \qquad B - Dt = 0, \qquad -1 \leqq t \leqq +1,$$

et c'est le long de ces courbes qu'il y aura lieu de prendre les intégrales définies ci-dessus.

Sur ces courbes la densité des zéros de $Q''_n = 0$ sera inversement proportionnelle à

$$\sin \operatorname{arc} \cos t = \sqrt{1 - t^2}.$$

D'une manière générale, si l'on considère la fraction continue

$$F = \lambda \dotplus \frac{\mu}{\lambda} \dotplus \frac{\mu}{\lambda} \dotplus \frac{\mu}{\lambda} \dotplus \ldots,$$

on établira aisément qu'elle représente toujours la racine de plus grand

module de l'équation

$$Y = \lambda - \frac{\mu}{Y}.$$

La fraction continue sera partout convergente sauf sur les courbes d'égal module pour lesquelles on aura

$$\frac{\lambda^2}{\mu} = \theta,$$

$\theta$ étant une quantité réelle quelconque comprise entre o et $+4$; les racines $Y_1$, $Y_2$ prennent alors la forme

$$(Y_1, Y_2) = \frac{\lambda}{2}\left(1 \pm i\sqrt{\frac{4}{\theta} - 1}\right),$$

et elles ont évidemment même module.

En posant $\lambda^2 = A + Bi$, $\mu = C + Di$, l'équation analytique de la coupure est $AD - BC = 0$; mais la coupure proprement dite comprend seulement les parties réellement rencontrées par les courbes orthogonales

$$A - \theta C = 0, \qquad B - \theta D = 0,$$

$\theta$ étant compris entre o et $+4$ (¹).

**32.** Considérons maintenant le cas d'une fraction périodique mixte, $k$ étant le nombre de dénominateurs partiels qui précèdent la période. On a, d'après (8),

$$Q_{k+n}^0 = \mu_{k+1} Q_k^0 Q_{k+n}^{k+1} - Q_{k+1}^0 Q_{k+n}^k,$$
$$Q_{k+n}^1 = \mu_{k+1} Q_k^1 Q_{k+n}^{k+1} - Q_{k+1}^1 Q_{k+n}^k,$$

d'où

$$\frac{Q_{k+n}^0}{Q_{k+n}^1} = \frac{\mu_{k+1} Q_k^0 - Q_{k+1}^0 \dfrac{Q_{k+n}^k}{Q_{k+n}^{k+1}}}{\mu_{k+1} Q_k^1 - Q_{k+1}^1 \dfrac{Q_{k+n}^k}{Q_{k+n}^{k+1}}}.$$

Par hypothèse, $Q_{k+n}^k$, $Q_{k+n}^{k+1}$ peuvent être calculées au moyen des formules du paragraphe **28** et, si $(z)$ est la racine de plus grand mo-

(¹) Si les deux racines ont partout le même module on peut dire que la fraction continue représente les deux racines sur tout le plan complexe.

dule à laquelle correspond la fraction périodique simple, nous savons que

$$\lim(n=\infty)\frac{Q_{k+n}^{k}}{Q_{k+n}^{k+1}}=(z);$$

par suite,

$$\lim(n=\infty)\frac{Q_n^0}{Q_n^1}=\frac{\mu_{k+i}Q_k^0-(z)Q_{k+1}^0}{\mu_{k+i}Q_k^1-(z)Q_{k+1}^1}.$$

Nous voyons, en conséquence, que les conditions de convergence de la fraction mixte sont les mêmes que celles de la fraction simple correspondante et que l'on passe de l'une à l'autre de ces fractions par une substitution linéaire.

En particulier, si $\mu_i=1$, cette substitution devient modulaire et les deux fractions sont équivalentes au sens de Dedekind, c'est-à-dire que

$$Q_k^0 Q_{k+1}^1 - Q_{k+1}^0 Q_k^1 = 1.$$

**33.** Lorsque les dénominateurs (ou numérateurs) partiels tendent, pour $n=\infty$, vers une limite bien déterminée, nous dirons que la fraction continue est asymptotiquement périodique. Les résultats obtenus, tant au paragraphe précédent qu'au paragraphe **23**, nous permettent d'inférer que les conditions de convergence d'une semblable fraction seront les mêmes que celles de la fraction périodique limite correspondante.

Mais, avant d'examiner le cas général, nous allons examiner un cas particulier qui nous conduira à la notion de fraction semi-périodique simple.

Considérons la fraction continue

$$Y_1 = z + \frac{\rho_1}{z} \dot{-} \frac{\rho_2}{z+\frac{\rho_2}{z}} \dot{-} \frac{\rho_3}{z+\frac{\rho_3}{z}} \dot{-} \frac{\rho_4}{z+\frac{\rho_4}{z}} \dot{-} \cdots$$

et admettons que $\lim \rho_n = R$.

Nous avons la relation récurrente

$$Q_{n+1}^0=\left(z+\frac{\rho_n}{z}\right)Q_n^0-\rho_n Q_{n-1}^0 \text{ [1]}$$

[1] Cette formule donne

$$Q_{n+1}^0 - zQ_n^0 = \frac{\rho_n}{z}(Q_n^0 - zQ_{n-1}^0) = \frac{\rho_n\rho_{n-1}}{z^2}(Q_{n-1}^0 - zQ_{n-2}^0) = -\frac{\rho_n\rho_{n-1}\cdots\rho_2\rho_1}{z^n}.$$

et, par suite,

$$Q_0^0 = 0, \qquad -Q_1^0 = 1, \qquad -Q_2^0 = \left(z + \frac{\rho_1}{z}\right),$$
$$-Q_3^0 = \left(z + \frac{\rho_2}{z}\right)\left(z + \frac{\rho_1}{z}\right) - \rho_2 = z^2 + \rho_1 + \frac{\rho_1\rho_2}{z^2}\Big),$$
$$-Q_4^0 = z^3 + \rho_1 z + \frac{\rho_1\rho_2}{z} + \frac{\rho_1\rho_2\rho_3}{z^3}.$$

Les formules ci-dessus permettent de poser par induction la formule générale

$$-Q_n^0 = z^{n-1} + \sum_1^{n-1} \rho_1\rho_2\ldots\rho_j z^{n-1-2j},$$

dont il est facile de vérifier l'exactitude.

Nous avons donc

$$-Q_{n+1}^0 = z^n \quad + \rho_1 z^{n-2} + \rho_1\rho_2 z^{n-4} + \ldots + \rho_1\rho_2\ldots\rho_n z^{-n},$$
$$-Q_{n+1}^1 = z^{n-1} + \rho_2 z^{n-3} + \rho_2\rho_3 z^{n-5} + \ldots + \rho_2\rho_3\ldots\rho_n z^{-n+1}$$

et, par conséquent,

$$-Q_{n+1}^0 = z^n + \frac{\rho_1}{z}(-Q_{n+1}^1),$$

d'où

$$\frac{Q_{n+1}^0}{Q_{n+1}^1} = \frac{\rho_1}{z} - \frac{z^n}{Q_{n+1}^1}.$$

Mettons $-Q_{n+1}^1$ sous la forme

$$-Q_{n+1}^1 = z^{n-1}\left(1 + \frac{\rho_2}{z^2} + \frac{\rho_2\rho_3}{z^4} + \frac{\rho_2\rho_3\rho_4}{z^6} + \ldots\right).$$

Le polynome entre parenthèses devient une série quand $n$ augmente indéfiniment; le rapport d'un terme au suivant est $\frac{z^2}{\rho_k}$; admettons que, pour $k > k_0$, le module de ce rapport soit constamment supérieur à 1; nous obtiendrons une série convergente S et l'on pourra écrire

$$\lim \frac{Q_{n+1}^0}{Q_{n+1}^1} = \frac{\rho_1}{z} + \frac{z}{S}.$$

Écrivons, au contraire, $-Q^1_{n+1}$ sous la forme

$$-Q^1_{n+1} = \rho_2\rho_3\ldots\rho_n z^{-n+1}\left(1 + \frac{z^2}{\rho_n} + \frac{z^4}{\rho_n\rho_{n-1}} + \ldots\right).$$

Dans le polynome entre parenthèses qui devient une série pour $n=\infty$, le rapport d'un terme au suivant est $\frac{\rho_k}{z^2}$, soit l'inverse du rapport précédent; si, pour $k > k_0$, le module de ce rapport est constamment supérieur à 1, nous aurons une série convergente S′ et l'on pourra écrire

$$\lim\frac{Q^0_{n+1}}{Q^1_{n+1}} = \frac{\rho_1}{z} + \frac{z^{2n-1}}{\rho_2\rho_3\ldots\rho_n S'},$$

mais, d'après l'hypothèse pour $k > k_0$,

$$\left|\frac{z^2}{\rho_k}\right| < 1,$$

d'où il vient

$$\left|\frac{z^{2n-1}}{\rho_2\rho_3\ldots\rho_n S'}\right| < (1-\varepsilon)^{n-k_0}\left|\frac{Az}{S'}\right|$$

et, par conséquent,

$$\lim\frac{Q^0_{n+1}}{Q^1_{n+1}} = \frac{\rho_1}{z}.$$

On conclut donc de ce qui précède :

Pour $|z| > \sqrt{R}$, on a

$$Y_1 = \frac{\rho_1}{z} + \frac{z}{S}$$

et, pour $|z| < \sqrt{R}$,

$$Y_1 = \frac{\rho_1}{z} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\rho_1}{Y_1} = z.$$

Dans le cas où $\rho_n$ ne tendrait pas régulièrement vers sa limite R, on aurait à considérer les deux limites

$$\lim\text{inf.}\sqrt[p]{\rho_1\rho_2\ldots\rho_p} \quad \text{et} \quad \lim\text{sup.}\sqrt[p]{\rho_n\rho_{n-1}\ldots\rho_{n-p+1}}$$

qui peuvent être égales ou inégales. Le premier cas se présentera en

particulier si le nombre des $\rho$ ne tendant pas vers R est infiniment petit par rapport à ceux qui y tendent effectivement.

Considérons en second lieu la fraction

$$Y_2 = z + \frac{\rho_1}{z} - \frac{\rho_1}{z + \frac{\rho_2}{z}} - \frac{\rho_2}{z + \frac{\rho_3}{z}} - \frac{\rho_3}{z + \frac{\rho_4}{z}} - \cdots$$

Nous aurons la formule récurrente

$$Q_{n+1}^0 = \left(z + \frac{\rho_n}{z}\right) Q_n^0 - \rho_{n-1} Q_{n-1}^0 \text{ (}^1\text{)}$$

et l'on obtient, comme précédemment, par voie d'induction, la formule générale

$$-Q_n^0 = z^{n-1} + \sum_1^{n-1} \rho_{n-1}\rho_{n-2}\cdots\rho_{n-j}\, z^{n-1-2j}$$

dont il est facile de vérifier l'exactitude.

On en tire aisément

$$\frac{Q_{n+1}^0}{Q_{n+1}^1} = z + \frac{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n z^{-n}}{-Q_{n+1}^1}.$$

Mettons $-Q_{n+1}^1$ sous la forme

$$-Q_{n+1}^1 = \rho_2\rho_3\cdots\rho_n z^{-n+1}\left(1 + \frac{z^2}{\rho^2} + \frac{z^4}{\rho_2\rho_3} + \cdots\right).$$

Le rapport d'un terme au suivant est $\frac{\rho_k}{z^2}$; si, pour $k > k_0$, le module de ce rapport est constamment supérieur à 1, nous aurons, pour $n = \infty$, une série convergente $\Sigma$ et il viendra

$$\lim \frac{Q_{n+1}^0}{Q_{n+1}^1} = z + \frac{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n z^{-n}}{\rho_2\rho_3\cdots\rho_n z^{-n+1}\Sigma} = z + \frac{\rho_1}{z\Sigma}.$$

---

(1) Cette formule donne

$$Q_{n+1}^0 - \frac{\rho_n}{z} Q_n^0 = z\left(Q_n^0 - \frac{\rho_{n-1}}{z} Q_{n-1}^0\right) = z^2\left(Q_{n-1}^0 - \frac{\rho_{n-2}}{z} Q_{n-2}^0\right) = -z.$$

Au contraire, on peut écrire

$$-\mathrm{Q}_{n+1}^{1} = z^{n-1}\left(1 + \frac{\rho_n}{z^2} + \frac{\rho_n \rho_{n-1}}{z^4} + \ldots\right)$$

et si, pour $k > k_0$, le rapport $\left|\frac{z^2}{\rho_k}\right|$ est supérieur à 1, la série $\Sigma'$ entre parenthèses sera convergente. On aura donc

$$\lim \frac{\mathrm{Q}_{n+1}^{0}}{\mathrm{Q}_{n+1}^{1}} = z + \frac{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n}{z^{2n-1}\Sigma'}$$

et, d'après l'hypothèse $\left|\frac{\rho_k}{z^2}\right| < 1$, on voit que le terme complémentaire peut devenir plus petit qu'une quantité quelconque donnée *a priori*; on a donc finalement

$$\lim \frac{\mathrm{Q}_{n+1}^{0}}{\mathrm{Q}_{n+1}^{1}} = z.$$

Si nous considérons la fraction simple limite

$$y = z + \frac{\mathrm{R}}{z} \,\dot{-}\, \frac{\mathrm{R}}{z + \frac{\mathrm{R}}{z}} \,\dot{-}\, \frac{\mathrm{R}}{z + \frac{\mathrm{R}}{z}} \,\dot{-}\, \ldots,$$

dont les valeurs sont $z$ et $\frac{\mathrm{R}}{z}$ selon que $|z| \gtrless \left|\frac{\mathrm{R}}{z}\right|$, nous voyons que :

Pour $|z| < |\sqrt{\mathrm{R}}|$,

$$\frac{\rho_1}{\mathrm{Y}_1} = \frac{\mathrm{R}}{y};$$

Pour $|z| > |\sqrt{\mathrm{R}}|$,

$$\mathrm{Y}_2 = y.$$

On peut donc dire que $\mathrm{Y}_1$ et $\mathrm{Y}_2$ sont égales à leur fraction simple limite, mais d'un côté seulement de la coupure; c'est cette considération qui nous a conduit à leur donner l'appellation de *fractions semi-périodiques simples*.

En appliquant le théorème de Cauchy au domaine extérieur aux coupures, nous obtenons les formules

$$\mathrm{Y}_1 = \int_{\mathrm{C}} \frac{z\, dz}{\mathrm{S}(z - x)}, \qquad \mathrm{Y}_2 = \int_{\mathrm{C}'} \frac{\rho_1\, dz}{z\, \Sigma(z - x)}$$

qui constituent une généralisation des formules obtenues précédemment.

**34.** Considérons maintenant la fraction continue asymptotiquement périodique

$$Y = \lambda + \varepsilon_1 \dot{-} \frac{1}{\lambda + \varepsilon_2} \dot{-} \frac{1}{\lambda + \varepsilon_3} \dot{-} \frac{1}{\lambda + \varepsilon_4} \dot{-} \ldots$$

dans laquelle nous avons mis en évidence la limite commune des dénominateurs partiels.

Posons $\lambda = \alpha + \frac{1}{\alpha}$, $\alpha$ étant, par hypothèse, la racine de plus grand module qui satisfait à cette équation; nous avons vu précédemment que $\alpha$ est bien déterminée en tout point du plan complexe, sauf sur les courbes ou portions de courbes pour lesquelles $\lambda$ aurait une valeur réelle comprise entre $-2$ et $+2$.

Nous savons également, d'après ce qui a été démontré au paragraphe **25**, que la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ de la fraction continue tend, pour $n = \infty$, vers une limite bien déterminée en tout point de ce même domaine.

Les symboles $Q_n^0$ satisfont à la relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_n\right) Q_n^0 - Q_{n-1}^0$$

et nous introduirons les symboles $\mathfrak{Q}_n^0$ définis par

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \mathfrak{Q}_n^0 - \mathfrak{Q}_{n-1}^0.$$

Nous rappellerons un Mémoire de M. Poincaré (¹) dans lequel le théorème suivant est établi :

*Si l'on a l'équation de récurrence*

$$u_n + R_1 u_{n-1} + R_2 u_{n-2} + \ldots + R_k u_{n-k} = 0,$$

(¹) *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (*American Journal of Mathematics*, 1885, p. 237). — *Voir* également (Van Vleck, *Transactions of the american Mathematical Society*, juillet et octobre 1901, juillet 1903 et juillet 1904) une série d'articles sur la convergence des fractions continues.

$R_1, R_2, \ldots, R_k$ *étant des fonctions* quelconques *de $n$ qui tendent vers leurs limites $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ lorsque $n$ croît indéfiniment, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a pour limite une racine de l'équation*

$$z^k + \rho_1 z^{k-1} + \ldots + \rho_{k-1} z + \rho_k = 0$$

*et, en général, la racine de plus grand module.*

En appliquant ce théorème au cas actuel, nous en concluons que $\frac{Q^0_{n+1}}{Q^0_n}$ doit avoir, en général, pour limite $\alpha$ et exceptionnellement, dans certains cas particuliers, $\frac{1}{\alpha}$.

Cette dernière hypothèse est d'ailleurs à écarter; en effet, le rapport $\frac{Q^0_{n+1}}{Q^0_n}$ est une fonction continue des $\varepsilon_i$ qui, en vertu des résultats obtenus au paragraphe **28**, devient toujours égale à $\alpha$ lorsque ceux-ci s'annulent; il n'est dès lors pas possible que ce rapport devienne égal à $\frac{1}{\alpha}$ tant que l'on reste, bien entendu, dans le domaine considéré où, par hypothèse, $|\alpha| > \left|\frac{1}{\alpha}\right|$.

Admettons donc que l'on ait $\lim \frac{Q^0_{n+1}}{Q^0_n} = \alpha$.

Des relations récurrentes ci-dessus nous tirons

$$Q^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha} Q^0_n = \alpha\left(Q^0_n - \frac{1}{\alpha} Q^0_{n-1}\right) + \varepsilon_n Q^0_n,$$

$$\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}^0_n = \alpha\left(\mathfrak{Q}^0_n - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}^0_{n+1}\right);$$

d'où

$$\frac{Q^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha} Q^0_n}{\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}^0_n} = \frac{Q^0_n - \frac{1}{\alpha} Q^0_{n-1}}{\mathfrak{Q}^0_n - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}^0_{n-1}} + \frac{\varepsilon_n Q^0_n}{\alpha\left(\mathfrak{Q}^0_n - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}^0_{n-1}\right)}.$$

Nous déterminerons $\gamma_n$ de manière à avoir

$$\varepsilon_n Q^0_n = \alpha\gamma_n\left(Q^0_n - \frac{1}{\alpha} Q^0_{n-1}\right),$$

ce qui donne

$$\gamma_n = \varepsilon_n \frac{Q_n^0}{\alpha\left(Q_n^0 - \frac{1}{\alpha} Q_{n-1}^0\right)} = \varepsilon_n \frac{\frac{Q_n^0}{Q_{n-1}^0}}{\alpha\left(\frac{Q_n^0}{Q_{n-1}^0} - \frac{1}{\alpha}\right)}$$

et à la limite, pour $n = \infty$,

$$\gamma_n = \varepsilon_n \frac{1}{\alpha - \frac{1}{\alpha}},$$

d'où l'on aura

$$\frac{Q_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} Q_n^0}{\mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^0} = (1 + \gamma_n) \frac{Q_n^0 - \frac{1}{\alpha} Q_{n-1}^0}{\mathfrak{Q}_n^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_{n-1}^0}$$

et, par récurrence,

$$\frac{Q_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} Q_n^0}{\mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^0} = \prod_1^n (1 + \gamma_i).$$

Nous verrions, en reproduisant les raisonnements du Chapitre précédent, que le second membre tend, pour $n = \infty$ et sous certaines restrictions, vers une fonction entière ou quasi-entière $q_0$ dont l'ordre apparent dépend essentiellement de l'exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |\gamma_n|$, lequel est évidemment le même que celui de la série $\sum_1^\infty |\varepsilon_n|$.

En partant de la relation récurrente

$$Q_{n+1}^1 = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_n\right) Q_n^1 - Q_{n-1}^1,$$

nous aurions trouvé, par le même procédé,

$$\frac{Q_{n+1}^1 - \frac{1}{\alpha} Q_n^1}{\mathfrak{Q}_{n+1}^1 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^1} = \prod_2^n (1 + \delta_i)$$

et nous verrions que le second membre tend, pour $n = \infty$, vers une fonction entière ou quasi-entière $q_1$ de même nature que $q_0$.

La relation

$$\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^0_n = \alpha\left(\mathfrak{Q}^0_n - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^0_{n-1}\right).$$

donne, d'ailleurs, par récurrence,

$$\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^0_n = -\alpha^n,$$

de même

$$\mathfrak{Q}^1_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^1_n = -\alpha^{n-1},$$

d'où l'on tire

$$\lim \frac{Q^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha}Q^0_n}{Q^1_{n+1} - \frac{1}{\alpha}Q^1_n} = \lim \frac{Q^0_n}{Q^1_n} = \lim \frac{\alpha \prod_1^n (1+\gamma_i)}{\prod_2^n (1+\delta_i)} = \frac{\alpha q_0}{q_1},$$

et nous voyons que la réduite $\frac{Q^0_n}{Q^1_n}$ a pour limite une fonction méromorphe ou quasi-méromorphe dont l'ordre apparent a une limite supérieure facile à déterminer.

Il nous reste à mettre en évidence $\alpha$ dans les deux termes de la fraction ainsi obtenue.

Nous avons

$$Q^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha}Q^0_n = \left(\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^0_n\right)q^0_n \qquad \text{avec} \qquad \lim q^0_n = q_0,$$

d'où

$$\alpha Q^0_{n+1} - Q^0_n = \left(\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^0_n\right)\alpha q^0_n.$$

Posons

$$\alpha q^0_n = p^0_n - \alpha i^0_n,$$

$p^0_n$ et $i^0_n$ étant fonctions de $\lambda$ seulement.

On aura

$$\alpha Q^0_{n+1} - Q^0_n = \left(\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^0_n\right)(p^0_n - \alpha i^0_n).$$

Cette relation subsiste évidemment si l'on change $\alpha$ en $\frac{1}{\alpha}$ et il vient

$$\frac{1}{\alpha}Q^0_{n+1} - Q^0_n = (\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \alpha\mathfrak{Q}^0_n)\left(p^0_n - \frac{1}{\alpha}i^0_n\right),$$

d'où l'on tire en résolvant

$$Q^0_{n+1} = \mathfrak{Q}^0_n p^0_n \quad - \mathfrak{Q}^0_{n+1} i^0_n,$$
$$Q^0_n \quad = \mathfrak{Q}^0_{n-1} p^0_n - \mathfrak{Q}^0_n i^0_n$$

et, en observant que

$$(\mathfrak{Q}^0_n)^2 - \mathfrak{Q}^0_{n-1}\mathfrak{Q}^0_{n+1} = 1,$$

il vient

$$p^0_n = \mathfrak{Q}^0_n Q^0_{n+1} \quad - \mathfrak{Q}^0_{n+1} Q^0_n,$$
$$i^0_n = \mathfrak{Q}^0_{n-1} Q^0_{n+1} - \mathfrak{Q}^0_n Q^0_n.$$

Nous avons de même, en posant $q^1_n = p^1_n - \alpha i^1_n$ avec $\lim q^1_n = q_1$,

$$Q^1_{n+1} - \frac{1}{\alpha} Q^1_n = \left(\mathfrak{Q}^1_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^1_n\right) q^1_n = \left(\mathfrak{Q}^1_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^1_n\right)(p^1_n - \alpha i^1_n),$$

$p^1_n$ et $q^1_n$ étant fonctions de $\lambda$ seulement, et l'on trouvera, par le même procédé,

$$p^1_n = \mathfrak{Q}^1_{n+1} Q^1_{n+1} - \mathfrak{Q}^1_{n+2} Q^1_n,$$
$$i^1_n = \mathfrak{Q}^1_n Q^1_{n+1} \quad - \mathfrak{Q}^1_{n+1} Q^1_n,$$

d'où l'on tire, après réduction,

$$p^0_n i^1_n - i^0_n p^1_n = Q^0_n Q^1_{n+1} - Q^0_{n+1} Q^1_n = 1.$$

Cette relation aura encore lieu à la limite et l'on pourra finalement écrire

$$Y = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_1} \qquad \text{avec} \qquad P_0 I_1 - P_1 I_0 = 1,$$

$P_0$, $P_1$, $I_0$, $I_1$ étant des fonctions entières ou quasi-entières de $\lambda = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ dont l'ordre apparent est évidemment le même que celui de $q_0$ et de $q_1$.

Nous arrivons ainsi à une formule que le résultat du paragraphe **32** permettait de prévoir et qui constitue une généralisation importante de la formule (30) du Chapitre précédent; en particulier, pour $\lambda = 0$, $\alpha = \pm i$ et l'on retombe sur cette formule.

Soient $\alpha'$, $\alpha''$ les deux racines en un point de la coupure.

D'un côté de celle-ci nous avons à la limite

$$Y' = \frac{P_0 - \alpha' I_0}{P_1 - \alpha' I_1}.$$

De l'autre côté, c'est l'autre racine qui aura le plus grand module et l'on aura également à la limite

$$Y'' = \frac{P_0 - \alpha'' I_0}{P_1 - \alpha'' I_1},$$

d'où il viendra

$$Y' - Y'' = \frac{\alpha' - \alpha''}{P_1^2 - \lambda P_1 I_1 + I_1^2} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4}}{P_1^2 - \lambda P_1 I_1 + I_1^2}.$$

On aura donc, en appliquant le théorème de Cauchy et en prenant l'intégrale suivant la coupure,

$$Y = \int_C \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4}}{P_1^2 + I_1^2 - \lambda P_1 I_1} \frac{dz}{z - x}.$$

Nous voyons également que les deux déterminations de Y sont racines de l'équation

$$Y^2 (P_0^2 - \lambda P_0 I_0 + I_0^2) - 2Y \left[ (P_0 P_1 + I_0 I_1) - \frac{\lambda}{2} (P_0 I_1 + P_1 I_0) \right] + P_1^2 - \lambda P_1 I_1 + I_1^2 = 0.$$

Pour $\lambda = 0$, on retombe sur l'équation (31).

Nous avons donc établi d'une manière générale qu'une fraction continue asymptotiquement périodique satisfait à une équation du deuxième degré dont les coefficients sont des fonctions entières ou quasi-entières.

Considérons en dernier lieu la fraction continue

$$Y = \alpha + \beta + \varepsilon_1 \dot{-} \frac{\alpha\beta + \eta_2}{\alpha + \beta + \varepsilon_2} \dot{-} \frac{\alpha\beta + \eta_3}{\alpha + \beta + \varepsilon_3} \dot{-} \ldots,$$

dans laquelle nous avons mis en évidence la limite commune des numérateurs et dénominateurs partiels ($\lim \varepsilon_n = \lim \eta_n = 0$) et les valeurs ($Y' = \alpha$, $Y'' = \beta$) de la fraction périodique simple limite.

Dans ce cas, nous avons vu que la coupure sera constituée par les courbes sur lesquelles on a $|\alpha| = |\beta|$.

Nous avons la relation récurrente

$$Q^0_{n+1} = (\alpha + \beta + \varepsilon_n) Q^0_n - (\alpha\beta + \eta_n) Q^0_{n-1}.$$

Considérons le symbole $\mathfrak{Q}^0_n$ défini par

$$\mathfrak{Q}^0_{n+1} = (\alpha + \beta)\mathfrak{Q}^0_n - \alpha\beta\mathfrak{Q}^0_{n-1}.$$

Nous savons que

$$\mathfrak{Q}^0_n = -\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

et si $\alpha$ est la racine de plus grand module nous aurons

$$\lim \frac{\mathfrak{Q}^0_{n+1}}{\mathfrak{Q}^0_n} = \alpha.$$

De même l'application du théorème de M. Poincaré nous conduit à poser

$$\lim \frac{Q^0_{n+1}}{Q^0_n} = \alpha.$$

Dès lors nous avons

$$Q^0_{n+1} - \beta Q^0_n = \alpha(Q^0_n - \beta Q^0_{n-1}) + \varepsilon_n Q^0_n - \eta_n Q^0_{n-1}.$$

Déterminons $\gamma_n$ par l'égalité

$$\varepsilon_n Q^0_n - \eta_n Q^0_{n-1} = \alpha\gamma_n(Q^0_n - \beta Q^0_{n-1}),$$

d'où

$$\gamma_n = \frac{\varepsilon_n Q^0_n - \eta_n Q^0_{n-1}}{\alpha(Q^0_n - \beta Q^0_{n-1})},$$

et à la limite

$$\lim \gamma_n = \frac{\varepsilon_n \alpha - \eta_n}{\alpha(\alpha - \beta)},$$

d'où

$$\frac{Q^0_{n+1} - \beta Q^0_n}{\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \beta \mathfrak{Q}^0_n} = (1 + \gamma_n)\frac{Q^0_n - \beta Q^0_{n-1}}{\mathfrak{Q}^0_n - \beta \mathfrak{Q}^0_n} = \prod_1^n (1 + \gamma_i),$$

et les calculs pourront se poursuivre comme précédemment. Nous arriverons à démontrer le théorème général à savoir que

$$Y = \lim \frac{Q^0_n}{Q^1_n} = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_1} \qquad \text{avec} \qquad P_0 I_1 - P_1 I_0 = R,$$

$P_0$, $I_0$, $P_1$, $I_1$, R étant des fonctions entières ou quasi-entières dont l'ordre apparent aura une limite supérieure déterminée par la considération des exposants de convergence des séries $\sum_1^\infty |\varepsilon_n|$, $\sum_2^\infty |\eta_n|$. En ce qui concerne R son ordre apparent aura une limite supérieure qui dépendra seulement de l'exposant de cette dernière série [1].

Dans le cas particulier où $\alpha$ et $\beta$ ont partout le même module, on pourrait reprendre les calculs qui précèdent et, en reproduisant les raisonnements du paragraphe **24**, on arriverait à démontrer que la fraction continue représente sur tout le plan complexe deux fonctions ainsi définies

$$Y_1 = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_1}, \qquad Y_2 = \frac{P_0 - \beta I_0}{P_1 - \beta I_1}$$

avec $P_0 I_1 - P_1 I_0 = R$.

**35**. Les considérations qui précèdent s'appliquent immédiatement aux fractions continues de Stieltjes.

Nous avons mis celles-ci sous la forme

$$\frac{S_0}{y^{2i-1} S_1} = Y = \alpha_1 y \dotplus \frac{1}{\alpha_2 y} \dotplus \frac{1}{\alpha_3 y} \dotplus \frac{1}{\alpha_4 y} \dotplus \dots.$$

Admettons que $\alpha_n = A + \varepsilon_n$ avec $\lim \varepsilon_n = 0$.

Nous savons que les conditions de convergence de cette fraction seront les mêmes que pour la fraction simple limite

$$u = Ay - \frac{1}{u},$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{1}{2}(Ay \pm \sqrt{A^2 y^2 - 4}).$$

La coupure est formée par la ligne droite reliant les deux points $-\frac{2}{A}$,

---

(1) R est égal, en effet, à $\prod_2^\infty \left(1 + \frac{\eta_i}{\alpha\beta}\right)$ sous réserve des facteurs primaires qu'il est nécessaire d'introduire pour rendre ce produit convergent.

$+\frac{2}{A}$; comme d'ailleurs, pour $y=0$, les deux valeurs de $u$ ont même module 1, il en résulte que l'origine se trouve sur la coupure et que celle-ci va du point $-\frac{2}{A}$ au point $+\frac{2}{A}$ en passant par l'origine; c'est un segment de longueur $\left|\frac{4}{A}\right|$.

La fraction sera égale à

$$Y=\frac{P_0-uI_0}{P_1-uI_1} \qquad \text{avec} \qquad P_0I_1-P_1I_0=1,$$

$P_0$, $I_0$, $P_1$, $I_1$ ayant un ordre apparent en $y$ au plus égal à l'exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |\varepsilon_n|$.

Si l'on considère Y comme fonction de $x=y^2$ le binome sous le radical devient $A^2x-4$ et l'on voit immédiatement que la coupure est une droite qui s'étend depuis le point $x=\frac{4}{A^2}$ jusqu'à l'infini en passant par l'origine.

La fraction de Stieljes peut aussi s'écrire

$$Y=1 \dotplus \frac{\beta_1\frac{1}{x}}{1} \dotplus \frac{\beta_2\frac{1}{x}}{1} \dotplus \frac{\beta_3\frac{1}{x}}{1} \dotplus \cdots$$

avec

$$\beta_n=B+\varepsilon_n, \qquad \lim\varepsilon_n=0.$$

Posons $\frac{1}{x}=z$. Cette fraction aura les mêmes conditions de convergence que la fraction simple limite

$$u=1-\frac{Bz}{u},$$

d'où

$$u=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4Bz}).$$

La coupure s'étend depuis le point $z=\frac{1}{4B}$ jusqu'à l'infini suivant la droite issue de l'origine; mais elle ne renferme pas celle-ci, car, pour $z=0$, $u$ a deux valeurs distinctes : 1 et 0.

Comme précédemment on pourra écrire

$$Y = \frac{P_0 - uI_0}{P_1 - uI_1} \qquad \text{avec} \qquad P_0 I_1 - P_1 I_0 = R,$$

$P_0$, $I_0$, $P_1$, $I_1$, $R$ ayant un ordre apparent en $z$ au plus égal à l'exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |\varepsilon_n|$.

En utilisant la formule du paragraphe **17** il sera facile de ramener au cas étudié ci-dessus le cas d'une fraction asymptotiquement périodique dont les dénominateurs et numérateurs partiels tendent respectivement pour $n = \infty$ vers $k$ limites distinctes $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$, $M_1$, $M_2, \ldots, M_k$ avec

$$\lim \lambda_{nk+i} = \Lambda_i, \qquad \lim \mu_{nk+i} = M_i.$$

## CHAPITRE V.

### A. GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS DE STIELTJES.

**56.** Considérons la fraction continue

$$F = \lambda_1 x \pm \mu_1 \dot{-} \frac{\rho_2}{\lambda_2 x \pm \mu_2} \dot{-} \frac{\rho_3}{\lambda_3 x \pm \mu_3} \dot{-} \frac{\rho_4}{\lambda_4 x \pm \mu_4} \cdots,$$

dans laquelle nous supposons explicitement $\lambda_i$, $\mu_i$, $\rho_i$, réels et positifs.

Nous avons la relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = (\lambda_n x \pm \mu_n) Q_n^0 - \rho_n Q_{n-1}^0,$$

avec les valeurs particulières

$$-Q_1^0 = 1, \qquad -Q_2^0 = \lambda_1 x \pm \mu_1,$$
$$-Q_3^0 = (\lambda_2 x \pm \mu_2)(\lambda_1 x \pm \mu_1) - \rho_2.$$

De ces formules il résulte immédiatement que $-Q_{n+1}^0$ est un polynome entier en $x$ à coefficients réels, de degré $n$ et que le coefficient de $x^n$ est $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$, c'est-à-dire positif.

Considérons la suite des polynomes

$$-Q^0_{n+1},\quad -Q^0_n,\quad \ldots,\quad -Q^0_2,\quad -Q^0_1 = 1.$$

Je dis que c'est une suite de Sturm.

En effet :

1° Deux polynomes consécutifs $-Q^0_{i+1}$, $-Q^0_i$ ne peuvent pas s'annuler simultanément pour une valeur de la variable, car, en vertu de la relation récurrente (6), il en serait de même de $-Q^0_{i-2}$, $-Q^0_{i-3}$, ..., $-Q^0_2$ et $-Q^0_1 = 1$, ce qui est impossible.

2° Si un polynome $-Q^0_i$ s'annule, il résulte de la relation ci-dessus que les polynomes contigus $-Q^0_{i+1}$ et $-Q^0_{i-1}$ sont de signe contraire.

3° Enfin, pour $x = -\infty$, la suite n'offre que des variations; pour $x = +\infty$ elle n'offre que des permanences; donc, toutes les racines de $Q^0_{n+1} = 0$ sont réelles et séparées par celles, également toutes réelles, de $Q^0_n = 0$. En outre, si $x_0$ annule $Q^0_{n+1}$, $Q^0_n(x_0)$ aura le même signe que la dérivée $(Q^0_{n+1})'_{x_0}$.

On démontrerait exactement de la même manière que la suite

$$-Q^0_{n+1},\quad -Q^1_{n+1},\quad \ldots,\quad -Q^{n-2}_{n+1},\quad -Q^{n-1}_{n+1},\quad -Q^n_{n+1} = 1$$

est une suite de Sturm.

Les racines de $Q^0_{n+1} = 0$ sont séparées par celles toutes réelles de $Q^1_{n+1} = 0$ et, si $x_0$ annule $Q^0_{n+1}$, $Q^1_{n+1}(x_0)$ a le même signe que $(Q^0_{n+1})'_{x_0}$ et par conséquent que $Q^0_n(x_0)$.

De ce qui précède il résulte immédiatement que toutes les racines de $Q^0_{n+1} = 0$ sont distinctes; si, en effet, cette équation avait une racine multiple, celle-ci serait également racine de $Q^0_n = 0$ et $Q^1_{n+1} = 0$, ce qui est évidemment incompatible avec la relation

$$Q^0_n Q^1_{n+1} - Q^0_{n+1} Q^1_n = \prod_2^n \rho_j \neq 0.$$

**57.** Nous allons généraliser la proposition qui précède et démontrer que les racines de $Q^0_{n+1} = 0$ sont séparées par celles de $Q^0_j Q^j_{n+1} = 0$

$$0 < j < n+1.$$

Pour $j = 1, j = n$ on retrouve la proposition ci-dessus.

Nous avons, en effet, d'après (8),

$$Q_{n+1}^0 = \rho_j Q_{j-1}^0 Q_{n+1}^j - Q_j^0 Q_{n+1}^{j-1},$$

et, en remplaçant, d'après (7), $Q_{n+1}^{j-1}$ par sa valeur

$$(\lambda_j x \pm \mu_j) Q_{n+1}^j - \rho_{j+1} Q_{n+1}^{j+1},$$

il viendra

$$Q_{n+1}^0 = \rho_j Q_{j-1}^0 Q_{n+1}^j + \rho_{j+1} Q_j^0 Q_{n+1}^{j+1} - (\lambda_j x \pm \mu_j) Q_j^0 Q_{n+1}^j,$$

d'où, en divisant par $Q_j^0 Q_{n+1}^j$,

$$\frac{Q_{n+1}^0}{Q_j^0 Q_{n+1}^j} = -(\lambda_j x \pm \mu_j) + \rho_j \frac{Q_{j-1}^0}{Q_j^0} + \rho_{j+1} \frac{Q_{n+1}^{j+1}}{Q_{n+1}^j}.$$

D'après ce qui précède nous savons que, si $\alpha$ est une racine de $Q_j^0 = 0$, l'expression $\frac{Q_{j-1}^0}{Q_j^0}$ passe du négatif au positif quand $x$ passe de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$; de même, si $\beta$ est une racine de $Q_{n+1}^j = 0$, l'expression $\frac{Q_{n+1}^{j+1}}{Q_{n+1}^j}$ passe comme la précédente de $-\infty$ à $+\infty$ quand $x$ varie de $\beta - \varepsilon$ à $\beta + \varepsilon$. Supposons maintenant que $\gamma$, $\delta$, $(\gamma < \delta)$, soient deux racines consécutives de $Q_j^0 Q_{n+1}^j = 0$.

Durant l'intervalle $\gamma + \varepsilon$, $\delta - \varepsilon$ le dénominateur $Q_j^0 Q_{n+1}^j$ conserve le même signe; pour $x = \gamma + \varepsilon$ le second membre tend vers $+\infty$; pour $x = \delta - \varepsilon$ il tend vers $-\infty$; le numérateur $Q_{n+1}^0$ s'annule donc bien au moins une fois dans cet intervalle. En outre, pour $x = -\infty$ le second membre tend vers $+\infty$ et pour $x = +\infty$ il tend vers $-\infty$; donc les racines de $Q_{n+1}^0 = 0$ sont séparées par celles de $Q_j^0 Q_{n+1}^j = 0$ et par le point à l'infini.

Remarquons d'ailleurs que, si $Q_j^0 = 0$ et $Q_{n+1}^j = 0$ ont une ou plusieurs racines communes, ces racines satisferont également à $Q_{n+1}^0 = 0$ en vertu de la relation ci-dessus; et il est clair que ces racines ne dépendront ni de $\lambda_j$ ni de $\mu_j$ qui ne figurent pas dans $Q_j^0 Q_{n+1}^j = 0$.

De la relation (8) nous tirons

$$\frac{\partial Q_{n+1}^0}{\partial \mu_j} = - Q_j^0 Q_{n+1}^j.$$

Si nous considérons une racine $x_0$ de $Q^0_{n+1} = 0$ comme fonction de $\mu_j$ il viendra en différentiant

$$(Q^0_{n+1})'_{x_0} \frac{dx_0}{d\mu_j} - Q^0_j Q^j_{n+1} = 0,$$

d'où

$$\frac{dx_0}{d\mu_j} = \frac{Q^0_j Q^j_{n+1}}{(Q^0_{n+1})'_{x_0}}.$$

Or, d'après ce qui précède, on voit facilement que $Q^0_j Q^j_{n+1}$ a toujours le signe de $(Q^0_{n+1})'_{x_0}$; la dérivée $\frac{dx_0}{d\mu_j}$ est donc toujours positive et $x_0$ croît en même temps que $\mu_j$.

**58.** Considérons la fraction

$$\frac{Q^1_{n+1}}{Q^0_{n+1}} = \sum \frac{A_i}{x - a_i},$$

nous savons que tous les $a_i$ sont distincts; d'autre part,

$$A_j = \frac{Q^1_{n+1}(a_j)}{(Q^0_{n+1})' a_j},$$

et ce coefficient sera toujours positif.

Nous avons d'ailleurs

$$-Q^1_{n+1} = \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n x^{n-1} + \ldots,$$
$$-Q^0_{n+1} = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n x^n \quad + \ldots$$

d'où, en vertu d'un théorème connu,

$$\sum A_i = \frac{1}{\lambda_1}.$$

On peut donc poser avec Stieltjes

$$\lim \frac{Q^1_{n+1}}{Q^0_{n+1}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(z)}{z - x}.$$

$\varphi$ étant une fonction constamment croissante de $-\infty$ à $+\infty$ et dont la croissance totale dans cet intervalle est égale à $\frac{1}{\lambda_1}$.

Les considérations de Stieljes peuvent donc être reproduites sans aucun autre changement que la coupure s'étend ici de $-\infty$ à $+\infty$ tandis que dans le Mémoire de Stieljes elle était limitée à la partie négative de cet axe; nous ne pouvons dès lors que renvoyer à ce remarquable Mémoire. Nous ferons seulement la remarque suivante :

Si l'on effectue la transformation

$$x = e^{-\theta i} z,$$

on remplacera l'axe des $x$ par un nouvel axe incliné de l'angle $\theta$ sur l'horizontale.

En posant

$$z = e^{\theta i} \frac{y - \alpha}{y - \beta},$$

le nouvel axe deviendra une circonférence passant par les points $\alpha$ et $\beta$ et capable de l'angle $\theta$. Dans ces conditions, le dénominateur partiel devient

$$\lambda_n \frac{y - \alpha}{y - \beta} \pm \mu_n, \qquad \lambda_n,\ \mu_n \text{ positifs.}$$

Si donc une fraction continue affecte cette forme, nous saurons déterminer complètement la circonférence formant coupure.

Les résultats de Stieltjes s'appliquent intégralement, sauf le changement d'une droite en une circonférence; on pourrait d'ailleurs adopter une transformation plus compliquée, mais celle que nous venons d'indiquer est la transformation linéaire la plus générale.

### B. GÉNÉRALISATION DES FRACTIONS CONTINUES.

**59.** Nous avons indiqué ailleurs ([1]) la possibilité de généraliser la théorie des fractions continues; nous allons en faire une application sommaire aux principaux résultats que nous avons obtenus précédemment.

Considérons $k$ polynomes ou séries $S_1, S_2, \ldots, S_k$, ordonnés par

---

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séances des 1er décembre 1902 et 11 septembre 1905.

rapport aux puissances décroissantes de la variable $x$ et de degrés maxima respectifs $n-1$, $n-2$, ..., $n-k$.

En divisant $S_1$ par $S_k$ nous obtiendrons comme quotient un polynome entier de degré $k-1$ et un reste de degré maximum $n-k-1$. Nous pouvons donc écrire

$$S_1 = \lambda_k S_k + (-1)^{k-1} S_{k+1}.$$

Nous pourrons de même diviser $S_2$ par $S_{k+1}$ ; le quotient $\lambda_{k+1}$ sera, en général, de degré $k-1$ et le reste $(-1)^{k-1} S_{k+2}$ de degré maximum $n-k-2$. Nous aurons donc

$$S_2 = \lambda_{k+1} S_{k+1} + (-1)^{k-1} S_{k+2}$$

et ainsi de suite.

On obtiendra de cette manière une suite limitée ou illimitée

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_k, \quad S_{k+1}, \quad S_{k+2}, \quad \ldots,$$

qui sera entièrement déterminée par la connaissance des $k$ premiers termes et qui constitue la généralisation naturelle de la forme normale (A) (*voir* Introduction, p. 2).

Pour plus de concision nous ne parlerons pas ici des formes normales généralisées (C).

Nous introduirons comme précédemment des symboles $Q_n^i$ qui satisfont à de nombreuses relations, généralisations de celles établies dans le Chapitre I et notamment aux suivantes

$$(6') \qquad Q_{n+k}^i = \lambda_{n+k-1} Q_{n+1}^i + (-1)^{k-1} Q_n^i,$$

$$(7') \qquad Q_n^i = \lambda_{i+k-1} Q_n^{i+k-1} + (-1)^{k-1} Q_n^{i+k},$$

$$(12') \qquad \begin{vmatrix} Q_n^i & Q_n^{i+1} & Q_n^{i+2} & \ldots & Q_n^{i+k-1} \\ Q_{n+1}^i & Q_{n+1}^{i+1} & Q_{n+1}^{i+2} & \ldots & Q_{n+1}^{i+k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{n+k-1}^i & Q_{n+k-1}^{i+1} & Q_{n+k-1}^{i+2} & \ldots & Q_{n+k-1}^{i+k-1} \end{vmatrix} = 1,$$

et qui permettent d'établir la relation générale (4')

$$S_i = Q_{n+1}^i S_n + Q_{n+2}^i S_{n+1} + \ldots + Q_{n+k-1}^i S_{n+k-2} + (-1)^{k-1} Q_n^i S_{n+k-1}.$$

On pourra étudier ce que deviennent à la limite, pour $n=\infty$, les rapports

$$Q_n^1 : Q_n^2 : \ldots : Q_n^k \qquad \text{et} \qquad Q_{n+1}^i : Q_{n+2}^i : \ldots : Q_{n+k}^i.$$

En particulier, si les $\lambda_n$ décroissent indéfiniment et si la série $\sum_2^\infty |\lambda_n|$ est uniformément convergente, on introduira les fonctions majorantes $\mathfrak{Q}_n^1$ ainsi définies

$$\mathfrak{Q}_{n+k}^1 = |\lambda_{n+k-1}|\mathfrak{Q}_{n+1}^1 + \mathfrak{Q}_n^1,$$

d'où

$$\mathfrak{Q}_{n+k}^1 + \mathfrak{Q}_{n+k-1}^1 + \ldots + \mathfrak{Q}_{n+1}^1 < (1 + |\lambda_{n+k+1}|)(\mathfrak{Q}_{n+k-1}^1 + \mathfrak{Q}_{n+k-2}^1 + \ldots + \mathfrak{Q}_n^1),$$

et, par suite,

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^1 < \mathfrak{Q}_{n+k}^1 + \mathfrak{Q}_{n+k-1}^1 + \ldots + \mathfrak{Q}_{n+1}^1 < \prod_1^n (1 + |\lambda_{n+k+1}|).$$

En reproduisant les raisonnements du Chapitre III on démontrera donc que les $Q_n^i$ tendent uniformément selon le reste minimum de $n$ $(\bmod k)$ vers $k$ fonctions entières ou quasi-entières lorsque $n$ augmente indéfiniment.

En appelant $j, j^2, j^3, \ldots, j^k$ les $k$ racines de l'équation

$$x^k = (-1)^{k-1}$$

et

$$\begin{array}{llll} P_1^1, & P_2^1, & \ldots, & P_k^1, \\ P_1^2, & P_2^2, & \ldots, & P_k^2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ P_1^k, & P_2^k, & \ldots, & P_k^k \end{array}$$

un système de $k^2$ fonctions entières obtenues comme précédemment et dont le déterminant est égal à $+1$, on aura

$$\frac{S_1}{jP_1^1 + j^2P_1^2 + \ldots + j^kP_1^k} = \frac{S_2}{jP_2^1 + j^2P_2^2 + \ldots + j^kP_2^k} = \ldots$$
$$= \frac{S_k}{jP_k^1 + j^2P_k^2 + \ldots + j^kP_k^k},$$

c'est la généralisation de la formule (30).

Si, au contraire, les $\lambda_n$ tendent pour $n = \infty$ vers une limite bien déterminée $\Lambda$ on verra que les rapports

$$Q_n^1 : Q_n^2 : \ldots : Q_n^k \qquad \text{et} \qquad Q_{n+1}^i : Q_{n+2}^i : \ldots : Q_{n+k}^i$$

tendent vers des limites bien déterminées sur tout le plan complexe, sauf sur les courbes pour lesquelles l'équation de M. Poincaré

$$z^k = \Lambda z + (-1)^{k-1}$$

possède deux ou plusieurs racines de même module maximum.

En dehors de ces courbes, en appelant $\alpha$ la racine de module maximum, qui est ainsi bien déterminée, on établira que l'on a la relation générale

$$\frac{S_1}{\alpha P_1^1 + \alpha^2 P_1^2 + \ldots + \alpha^k P_1^k} = \ldots = \frac{S_k}{\alpha P_k^1 + \alpha^2 P_k^2 + \ldots + \alpha^k P_k^k},$$

le déterminant des $k^2$ fonctions $P_n^m$ étant toujours égal à l'unité.

Si la limite $\Lambda$ est telle que l'équation de M. Poincaré ait deux ou plusieurs racines de même module maximum, on démontrera que la fraction continue représente sur tout le plan deux ou plusieurs fonctions convergentes et distinctes.

## CHAPITRE VI.

### APPLICATIONS.

**40.** Considérons les polynomes

$$S_0 = 1, \qquad S_1 = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

et réduisons la fraction $\frac{S_0}{S_1}$ en fraction continue en adoptant la forme normale (A).

Il viendra

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{a_1}{x} + b_1 \div \frac{1}{\frac{a_2}{x} + b_2} \div \frac{1}{\frac{a_3}{x} + b_3} \div \ldots.$$

Il s'agit en premier lieu d'exprimer les $a_i$, $b_i$ en fonction des $c_i$ ([1]).

L'établissement de ces formules ne présente aucune difficulté, car il s'agit d'un simple calcul formel; la formule générale s'établit facilement par voie d'induction et l'on démontre ensuite qu'en la supposant vraie pour le rang $n$ elle est également vraie pour le rang $n+1$.

Toutefois nous arriverons plus rapidement au résultat en utilisant les formules connues pour la transformation de $\frac{S_0}{S_1}$ en une fraction continue de Stieltjes.

Si nous posons

$$S_1 = \frac{x}{A_1} \dot{+} \frac{x}{A_2} + \frac{x}{A_3} \dot{+} \frac{x}{A_4} \dot{+} \cdots$$

nous avons les formules connues

$$A_{2p-1} = \frac{(D_2^{p-1})^2}{D_1^{p-1} D_1^p}, \qquad A_{2p} = -\frac{(D_1^p)^2}{D_2^{p-1} D_2^p},$$

dans lesquelles

$$D_i^p = \begin{vmatrix} c_i & c_{i+1} & \cdots & c_{i+p-1} \\ c_{i+1} & c_{i+2} & \cdots & c_{i+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i+p-1} & c_{i+p} & \cdots & c_{i+2p-2} \end{vmatrix} \qquad \text{avec} \qquad D_i^0 = 1.$$

Or, en posant

$$g_n = \frac{1}{A_n A_{n+1}}, \qquad g_0 = \frac{1}{A_1},$$

nous avons identiquement

$$S_1 = \frac{g_0}{\frac{1}{x}} \dot{+} \frac{g_1}{1} \dot{+} \frac{g_2}{\frac{1}{x}} \dot{+} \frac{g_3}{1} \dot{+} \frac{g_4}{\frac{1}{x}} \dot{+} \frac{g_5}{1} \dot{+} \cdots.$$

---

([1]) Stieltjes, *Op. cit.*, p. 31. — Auric, *Les équations linéaires et leurs applications*, p. 55.

c'est la forme étudiée par Stieltjes et elle est manifestement égale à

$$S_1 = \frac{g_0}{\frac{1}{x} + g_1} \,\dot{-}\, \frac{g_1 g_2}{\frac{1}{x} + g_2 + g_3} \,\dot{-}\, \frac{g_3 g_4}{\frac{1}{x} + g_4 + g_5} \,\dot{-}\, \frac{g_5 g_6}{\frac{1}{x} + g_6 + g_7} \,\dot{-}\, \cdots$$

Dès lors, si nous posons

$$\rho_n = g_{2n} + g_{2n+1} = -\frac{1}{D_2^n} \frac{D_2^{n-1}(D_1^{n+1})^2 + D_2^{n+1}(D_1^n)^2}{D_1^n D_1^{n+1}},$$

$$\sigma_n = g_{2n-1} g_{2n} = \frac{D_1^{n-1} D_1^{n+1}}{(D_1^n)^2}$$

avec

$$\rho_0 = g_1 = \frac{1}{A_1 A_2} = -\frac{D_2^1}{D_1^1}, \qquad \sigma_0 = g_0 = \frac{1}{A_1} = D_1^1,$$

il viendra

$$S_1 = \frac{\sigma_0}{\frac{1}{x} + \rho_0} \,\dot{-}\, \frac{\sigma_1}{\frac{1}{x} + \rho_1} \,\dot{-}\, \frac{\sigma_2}{\frac{1}{x} + \rho_2} \,\dot{-}\, \cdots$$

Il est d'ailleurs possible de simplifier la formule ci-dessus.

Appelons ${}_{i}D_{p}^{p+k}$ le déterminant $D_i^p$ dans lequel les indices de tous les éléments de la dernière colonne ont été augmentés de $k$ unités.

D'après une propriété bien connue des déterminants mineurs, nous avons les relations

$${}_{1}D_{p}^{p}\;{}_{2}D_{p}^{p+1} - {}_{2}D_{p}^{p}\;{}_{1}D_{p}^{p+1} = {}_{2}D_{p-1}^{p-1}\;{}_{1}D_{p+1}^{p+1},$$

$${}_{1}D_{p+1}^{p+1}\;{}_{2}D_{p}^{p+1} - {}_{1}D_{p+1}^{p+2}\;{}_{2}D_{p}^{p} = {}_{1}D_{p}^{p}\;{}_{2}D_{p+1}^{p+1}.$$

Multiplions la première égalité par ${}_{1}D_{p+1}^{p+1}$, la seconde par $-{}_{1}D_{p}^{p}$, il vient en ajoutant

$${}_{2}D_{p-1}^{p-1}\left({}_{1}D_{p+1}^{p+1}\right)^2 + {}_{2}D_{p+1}^{p+1}\left({}_{1}D_{p}^{p}\right)^2 = {}_{2}D_{p}^{p}\left({}_{1}D_{p}^{p}\;{}_{1}D_{p+1}^{p+2} - {}_{1}D_{p+1}^{p+1}\;{}_{1}D_{p}^{p+1}\right),$$

dès lors, en remplaçant dans $\rho_n$, on a

$$\rho_n = \frac{{}_{2}D_{n}^{n}\left({}_{1}D_{n+1}^{n+1}\;{}_{1}D_{n}^{n+1} - {}_{1}D_{n}^{n}\;{}_{1}D_{n+1}^{n+2}\right)}{{}_{2}D_{n}^{n}\;{}_{1}D_{n}^{n}\;{}_{1}D_{n+1}^{n+1}} = \frac{{}_{1}D_{n}^{n+1}}{{}_{1}D_{n}^{n}} - \frac{{}_{1}D_{n+1}^{n+2}}{{}_{1}D_{n+1}^{n+1}}.$$

On peut donc, sans inconvénient, faire disparaître l'indice 1 devenu inutile et l'on obtient

$$(35) \qquad \rho_n = \frac{D_n^{n+1}}{D_n^n} - \frac{D_{n+1}^{n+2}}{D_{n+1}^{n+1}}, \qquad \sigma_n = \frac{D_{n-1}^{n-1} D_{n+1}^{n+1}}{(D_n^n)^2}.$$

Telles sont les formules qui permettent de passer d'une série de Taylor à une fraction continue de la forme normale (A).

**41.** Posons $\frac{1}{x} = z$ et admettons que

$$\lim \rho_n = R, \qquad \lim \sigma_n = S, \qquad (n = \infty).$$

Les conditions de convergence de la fraction continue seront les mêmes que celles de la fraction périodique simple limite

$$Y = z + R - \frac{S}{Y},$$

d'où

$$Y = \frac{1}{2}(z + R) \pm \sqrt{(z + R)^2 - 4S}.$$

Les deux points critiques extrêmes sont

$$z', z'' = -R \pm 2\sqrt{S},$$

et la coupure est formée par la ligne droite qui joint ces deux points en passant par $z = -R$.

La formule qui donne $\rho_n$ nous montre immédiatement que, si $\Sigma\rho_n$ est convergente et a une limite, le rapport $\frac{D_n^{n+1}}{D_n^n}$ tend également vers cette limite et réciproquement; si, au contraire, comme nous l'avons admis ci-dessus, $\rho_n$ tend vers R, on voit que $\frac{1}{n}\frac{D_n^{n+1}}{D_n^n}$ tend vers cette même limite.

En ce qui concerne $\sigma_n$ nous pouvons écrire

$$\frac{D_{n+1}^{n+1}}{D_n^n} = \sigma_n \frac{D_n^n}{D_{n-1}^{n-1}},$$

d'où par récurrence

$$\frac{D_n^n}{D_{n-1}^{n-1}} = \sigma_{n-1}\frac{D_{n-1}^{n-1}}{D_{n-2}^{n-2}},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{D_2^2}{D_1^1} = \sigma_1, \qquad \frac{D_0^1}{D_0^0} = \sigma_1\sigma_0,$$

et en multipliant

$$\frac{D_{n+1}^{n+1}}{D_n^n} = \sigma_0\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n,$$

et par le même procédé

$$D_{n+1}^{n+1} = \sigma_0^{n+1}\sigma_1^n\sigma_2^{n-1}\dots\sigma_{n-1}^2\sigma_n;$$

à la limite on aura donc, si $\lim\sigma_n = S$,

$$\lim D_{n+1}^{n+1} = AS^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}.$$

Nous savons que, si les $\sigma_n$ sont tous positifs ($\rho_n$ et $\sigma_n$ étant réels par hypothèse), les équations $Q_n^0 = 0$ ont toutes leurs racines réelles.

Cette simple remarque constitue en somme la démonstration d'un théorème de M. Hurwitz [1] que nous énoncerons comme il suit :

*Pour que les racines de $Q_n^0 = 0$ soient toutes réelles et séparées par celles de $Q_n^1 = 0$, il faut que, si l'on a*

$$\frac{Q_n^0}{Q_n^1} = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots,$$

*les déterminants $D_n^n$ soient tous de même signe (et positifs puisque $D_0^0 = 1$) ou alternativement positifs ou négatifs (cas qui se ramène au précédent par le changement de $z$ en $-z$).*

**42.** Considérons la fraction

$$\frac{\sigma_0}{S_1} = \frac{c_1}{c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots} = \frac{1}{x} + \rho_0 - \cfrac{\sigma_1}{\frac{1}{x} + \rho_1 - \cfrac{\sigma_2}{\frac{1}{x} + \rho_2 - \dots}}$$

[1] WEBER, *Algèbre supérieure*, t. I, p. 338.

Soit $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ la réduite de rang $n$ et posons $\frac{1}{x} = z$,

$$Q_n^0 = z^{n-1} + \alpha_1 z^{n-2} + \alpha_2 z^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-2} z + \alpha_{n-1},$$
$$Q_n^1 = z^{n-2} + \beta_1 z^{n-3} + \beta_2 z^{n-4} + \ldots + \beta_{n-3} z + \beta_{n-2}.$$

En écrivant que les développements de $\frac{\sigma_0}{S_1}$ et de $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ ont le plus grand nombre de termes communs, on a

$$\begin{aligned}
c_1 &= c_1,\\
c_1\beta_1 &= c_2 + c_1\alpha_1,\\
c_1\beta_2 &= c_3 + c_2\alpha_1 + c_1\alpha_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_1\beta_{n-2} &= c_{n-1} + c_{n-2}\alpha_1 + c_{n-3}\alpha_2 + \ldots + c_1\alpha_{n-2},\\
0 &= c_n + c_{n-1}\alpha_1 + c_{n-2}\alpha_2 + \ldots + c_2\alpha_{n-2} + c_1\alpha_{n-1},\\
0 &= c_{n+1} + c_n\alpha_1 + c_{n-1}\alpha_2 + \ldots + c_3\alpha_{n-2} + c_2\alpha_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= c_{2n-2} + c_{2n-3}\alpha_1 + c_{2n-4}\alpha_2 + \ldots + c_n\alpha_{n-2} + c_{n-1}\alpha_{n-1}.
\end{aligned}$$

Si aux égalités ci-dessus nous ajoutons

$$Q_n^0 = z^{n-1} + z^{n-2}\alpha_1 + z^{n-3}\alpha_2 + \ldots + z\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1},$$

on aura en résolvant

$$Q_n^0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \ldots & z^{n-2} & z^{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n-1} & c_n \\ c_2 & c_3 & c_4 & \ldots & c_n & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-3} & c_{2n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-2} \end{vmatrix}}.$$

Si nous posons, d'autre part,

$$\begin{aligned}
P_1 &= c_1,\\
P_2 &= c_1 z + c_2,\\
P_3 &= c_1 z^2 + c_2 z + c_3,\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
P_{n-1} &= c_1 z^{n-2} + c_2 z^{n-3} + \dots + c_{n-2} z + c_{n-1},
\end{aligned}$$

on aura également

$$c_1 Q_n^1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & P_1 & P_2 & \dots & P_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix}}.$$

La formule récurrente

$$Q_n^0 = (z + \rho_{n-1}) Q_{n-1}^0 - \sigma_{n-1} Q_{n-2}^0$$

montre immédiatement que, dans le développement de $Q_n^0$, le coefficient de $z^{n-2}$ est égal à $-\sum_1^{n-1} \rho_i$; nous avons donc, en tenant compte des relations ci-dessus,

$$\sum \rho_i = -\frac{D_{n-1}^n}{D_{n-1}^{n-1}},$$

ce qui est une vérification de la formule établie précédemment (35).

**45.** Nous allons donner diverses applications des résultats ci-dessus. Considérons, en premier lieu, le développement

$$\frac{x}{a+\lambda} + \frac{x^2}{(a+\lambda)(a+2\lambda)} + \frac{x^3}{(a+\lambda)(a+2\lambda)(a+3\lambda)} + \dots,$$

qui est en quelque sorte une exponentielle généralisée.

On trouve facilement

$$\rho_n = -\frac{a}{(a+2n\lambda)[a+2(n+1)\lambda]},$$

$$\sigma_n = -\frac{n\lambda(a+n\lambda)}{[a+(2n-1)\lambda](a+2n\lambda)[a+(2n+1)\lambda]}.$$

Nous avons donc

$$\lim \rho_n = -\frac{a}{4n^2\lambda^2} = 0, \qquad \lim \sigma_n = -\frac{n^2}{16n^4\lambda^2} = -\frac{1}{16n^2\lambda^2} = 0.$$

En posant $\frac{1}{x} = z$, le point $z = 0$ est un point essentiel et la coupure se réduit à ce seul point; le développement est donc toujours convergent.

En particulier, faisons $a = 0$, $\lambda = 1$, on aura

$$\rho_n = 0, \qquad \sigma_n = -\frac{1}{4(4n^2-1)} = -\frac{1}{4(2n+1)(2n-1)},$$

d'où

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \dot{-} \frac{\frac{1}{4.3}}{\frac{1}{x}} \dot{-} \frac{\frac{1}{4.15}}{\frac{1}{x}} \dot{-} \frac{\frac{1}{4.35}}{\frac{1}{x}} \dot{-} \dots,$$

$$1 + \frac{2}{e^x-1} = \frac{2}{x} \dot{+} \frac{1}{\frac{6}{x}} \dot{+} \frac{1}{\frac{10}{x}} \dot{+} \frac{1}{\frac{14}{x}} \dot{+} \dots$$

et, en posant $\frac{2}{x} = z$,

$$\frac{e^{\frac{2}{z}}+1}{e^{\frac{2}{z}}-1} = z \dot{+} \frac{1}{3z} \dot{+} \frac{1}{5z} \dot{+} \frac{1}{7z} \dot{+} \dots,$$

développement qui ne diffère pas au fond de la formule bien connue de Lambert

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \text{tang hyp.}\, x = -i \,\text{tang}\, ix = \frac{x}{1} \dot{+} \frac{x^2}{3} \dot{+} \frac{x^2}{5} \dot{+} \frac{x^2}{7} \dot{+} \frac{x^2}{9} \dot{+} \dots$$

**44.** Considérons comme second exemple

$$\frac{x}{(a+\lambda)(a+2\lambda)\ldots[a+(k+1)\lambda]}+\frac{x^2}{(a+2\lambda)(a+3\lambda)\ldots[a+(k+2)\lambda]}+\ldots$$

qui est, en quelque sorte, une logarithmique généralisée.

Par l'application des formules on trouve

$$\rho_n = -\frac{(a+k\lambda)[a+(2n+1)\lambda]+2n(n+1)\lambda^2}{[a+(k+2n)\lambda][a+(k+2n+2)\lambda]},$$

$$\sigma_n = \frac{n(k+n)\lambda^2(a+n\lambda)[a+(k+n)\lambda]}{[a+(k+2n-1)\lambda][a+(k+2n)\lambda]^2[a+(k+2n+1)\lambda]}.$$

Par suite

$$\lim \rho_n = -\frac{2n^2\lambda^2}{4n^2\lambda^2} = -\frac{1}{2}, \qquad \lim \sigma_n = \frac{n^4\lambda^4}{16n^4\lambda^4} = \frac{1}{16}.$$

En posant $\frac{1}{x} = z$ on voit que les conditions de convergence sont les mêmes que pour

$$Y = z - \frac{1}{2} - \frac{1}{16Y},$$

d'où

$$Y = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{2}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - z}.$$

Les points critiques sont $z = 0$, $z = +1$, et la coupure est formée par le segment qui les réunit.

En particulier, si $a = 0$, $\lambda = 1$, $k = 0$, ce qui donne

$$-L(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots,$$

$$\rho_n = -\frac{2n(n+1)}{4n(n+1)} = \frac{1}{2}, \qquad \sigma_n = \frac{n^4}{(2n-1)4n^2(2n+1)} = \frac{n^2}{4(4n^2-1)},$$

d'où

$$-\frac{1}{L(1-x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \cfrac{\frac{1}{4.3}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \cfrac{\frac{4}{4.15}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \cfrac{\frac{9}{4.35}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \cfrac{\frac{16}{4.63}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \ldots}}}}$$

En posant $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} = y$, on a la formule connue

$$L\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} = \frac{1}{y} \dot{-} \frac{1}{3y} \dot{-} \frac{4}{5y} \dot{-} \frac{9}{7y} \dot{-} \frac{16}{9y} \dot{-} \frac{25}{11y} \dot{-} \frac{36}{13y} \dot{-} \cdots$$

qui est convergente sur tout le plan, sauf sur la coupure $-1 \ldots +1$.

En appliquant le théorème de Cauchy dans les conditions définies précédemment, on a

$$L\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{y+z}.$$

Dans le langage de Stieltjes cela signifie que l'on a une répartition continue de masse avec la densité $\frac{1}{2}$ sur le segment $-1 \ldots +1$.

Le développement

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \cdots$$

donne, par le même procédé,

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \dot{+} \frac{1}{3z} \dot{+} \frac{4}{5z} \dot{+} \frac{9}{7z} \dot{+} \cdots,$$

qui ne diffère du précédent que par le changement de signe; cette analogie, que le développement taylorien ne permettait pas de soupçonner, résulte de la formule bien connue

$$\operatorname{arc\,tang} y = i L\sqrt{\frac{1-yi}{1+yi}}.$$

Si, dans la formule

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \dot{+} \frac{1}{3z} \dot{+} \frac{4}{5z} \dot{+} \frac{9}{7z} \dot{+} \frac{16}{9z} \dot{+} \frac{25}{11z} \dot{+} \cdots,$$

nous ramenons tous les numérateurs partiels à l'unité, les dénominateurs partiels seront de la forme

$$\left(\frac{3.5.7\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots(2n-2)2n}\right)^2 (4n+1)z$$

et

$$\left(\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots 2n+1}\right)^2 (4n+3)z,$$

et, d'après la formule de Wallis, ils ont respectivement comme limite, pour $n = \infty$,

$$\pi z \qquad \text{et} \qquad \frac{4z}{\pi}.$$

Or nous avons le développement périodique

$$\frac{\pi}{2}\left(z \pm \sqrt{z^2+1}\right) = \pi z \dot{+} \frac{1}{\frac{4z}{\pi}} \dot{+} \frac{1}{\pi z} \dot{+} \frac{1}{\frac{4z}{\pi}} \dot{+} \frac{1}{\pi z} \dot{+} \frac{1}{\frac{4z}{\pi}} \dot{+} \ldots,$$

et, d'après les propriétés établies au Chapitre IV, on pourra écrire

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{z} = \frac{P_0 - I_0\frac{\pi}{2}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)}{P_1 - I_1\frac{\pi}{2}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)} \qquad \text{avec} \qquad P_0 I_1 - P_1 I_0 = 1.$$

On aurait de même

$$L\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} = \frac{P_0 - I_0\frac{\pi}{2}\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)}{P_1 - I_1\frac{\pi}{2}\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)}.$$

Considérons de même le développement [1]

$$\frac{x}{1+\lambda} + \frac{x^2}{1+2\lambda} + \frac{x^3}{1+3\lambda} + \ldots.$$

Il suffit de poser, dans le cas général, $a = 1$, $k = 0$, d'où

$$\rho_n = -\frac{1+(2n+1)\lambda + 2n(n+1)\lambda^2}{(1+2n\lambda)[1+(2n+2)\lambda]},$$

$$\sigma_n = \frac{n^2\lambda^2(1+n\lambda)^2}{[1+(2n-1)\lambda](1+2n\lambda)^2[1+(2n+1)\lambda]}$$

---

(1) POINCARÉ, *Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*, t. II, p. 3.

et, en posant $\frac{1}{x} = z$, on voit que la coupure sera le segment qui va de l'origine au point $+1$.

**45.** Comme troisième exemple, soit le développement

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots,$$

on trouve

$$\rho_n = \frac{m+n}{2(2n+1)} - \frac{m-n-1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2}, \qquad \sigma_n = -\frac{m^2-n^2}{4(4n^2-1)}.$$

Les conditions de convergence sont les mêmes que pour

$$Y = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16Y}.$$

Les points critiques sont ici 0 et $-1$ et la coupure est formée par le segment qui les réunit. Une transformation facile donne la formule connue ([1])

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m = 1 \dotplus \frac{2m}{z} \dotplus \frac{\frac{m^2-1}{3}}{z} \dotplus \frac{\frac{m^2-4}{15}}{z} \dotplus \frac{\frac{m^2-9}{35}}{z} \dotplus \ldots,$$

et la coupure est ici le segment $-1 \ldots +1$.

En appliquant le théorème de Cauchy on voit que, d'un côté de la coupure, la fraction est égale à

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m e^{2m\pi i}$$

et, de l'autre, à

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m e^{-2m\pi i}$$

et l'on obtient l'intégrale de Stieltjes

$$F = \frac{\sin 2m\pi}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m \frac{dz}{z+u}.$$

---

([1]) LAGUERRE, t. I, p. 344.

En considérant l'expression $\dfrac{\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^m - 1}{m}$ et en faisant tendre $m$ vers zéro, on trouve que la valeur limite est $\mathrm{L}\dfrac{z+1}{z-1}$, et l'on retombe sur la formule du paragraphe précédent.

De même en posant $z = \dfrac{y}{m}$ et en faisant tendre $m$ vers l'infini on retrouve la formule du paragraphe **45**.

Donnons encore deux développements indiqués par Laguerre ([1]).

Le premier est celui qui a servi de base aux recherches de Stieltjes

$$e^x \int_x^\infty \frac{e^{-u}\,du}{u} = \frac{1}{x+1} \,\dot{-}\, \frac{1}{x+3} \,\dot{-}\, \frac{\overline{2}^2}{x+5} \,\dot{-}\, \frac{\overline{3}^2}{x+7} \,\dot{-}\, \frac{\overline{4}^2}{x+9} \,\dot{-}\, \frac{\overline{5}^2}{x+11} \,\dot{-}\, \cdots$$

Nous avons ici

$$\lim \rho_n = 2n, \qquad \lim \sigma_n = n^2.$$

La fraction simple limite

$$\mathrm{Y} = x + 2n - \frac{n^2}{\mathrm{Y}}$$

donne

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{2}\left[x + 2n \pm \sqrt{x(x+4n)}\right]$$

dont les points critiques sont $0$ et $-\infty$.

La coupure s'étend donc sur toute la partie négative de l'axe des $x$.

De même la fraction continue

$$e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}} = 1 \,\dot{-}\, \frac{1}{\frac{1}{2} - x} \,\dot{+}\, \frac{1 + \frac{1}{4}}{-3x} \,\dot{+}\, \frac{4 + \frac{1}{4}}{-5x} \,\dot{+}\, \frac{9 + \frac{1}{4}}{-7x} \,\dot{+} \cdots$$

---

([1]) *Œuvres complètes*, t. I, p. 431 et 294.

donne par une transformation facile

$$\frac{1}{2}\,\frac{e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}}+1}{e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}}-1} = x \dotplus \frac{1+\frac{1}{4}}{3x} \dotplus \frac{4+\frac{1}{4}}{5x} \dotplus \frac{9+\frac{1}{4}}{7x} \dotplus \ldots,$$

et sous cette forme on reconnaît que la coupure s'étend du point $x=-1$ au point $x=+1$ et que la fraction continue est convergente sur tout le plan complexe, sauf sur ce segment.

# *Composantes de la force magnétique d'un aimant ellipsoïdal uniforme;*

PAR M. E. MATHY.

Ces composantes se déduisent de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, dont les formules sont (¹) :

$$(1)\quad \begin{cases} -\dfrac{dP}{dx} = \dfrac{3Mx}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}\left[\zeta(u+\omega_3)-\eta_3+e_3u\right], \\ -\dfrac{dP}{dy} = \dfrac{3My}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}\left[\zeta(u+\omega_2)-\eta_2+e_2u\right], \\ -\dfrac{dP}{dz} = \dfrac{3Mz}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\left[\zeta(u+\omega_1)-\eta_1+e_1u\right]. \end{cases}$$

Les quantités qui entrent dans ces expressions sont déterminées par les conditions suivantes :

M représente la masse de l'ellipsoïde considéré; $(x, y, z)$ désigne le point extérieur;

Par ce point extérieur, on a fait passer un ellipsoïde homothétique au premier; ses axes principaux $(a', b', c')$ seront connus par

$$(2)\qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'};$$

$$(3)\qquad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. II, 1896, fasc. III.

quand le point $(x, y, z)$ sera donné;

$$(4)\qquad \begin{cases} e_1 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2c^2), \\ e_2 = \frac{1}{3}(a^2 + c^2 - 2b^2), \\ e_3 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2a^2); \end{cases}$$

l'argument $u$, pour $\frac{dP}{dx}$, satisfait à $pu - e_3 = a'^2$, pour $\frac{dP}{dy}$, à $pu - e_2 = b'^2$ et, pour $\frac{dP}{dz}$, à $pu - e_1 = c'^2$; mais ces trois valeurs de $u$ sont égales, en vertu de (2) et de (4); elles permettent d'écrire (3) sous la forme

$$(5)\qquad \frac{x^2}{pu - e_3} + \frac{y^2}{pu - e_2} + \frac{z^2}{pu - e_1} = 1.$$

La dérivée $\frac{du}{dx}$ entrant dans les calculs suivants, il est préférable de la chercher séparément; à cet effet, en dérivant (5) par rapport à $x$, on trouve

$$(6)\qquad \frac{2x}{pu - e_3} - p'u\frac{du}{dx}\left[\frac{x^2}{(pu - e_3)^2} + \frac{y^2}{(pu - e_2)^2} + \frac{z^2}{(pu - e_1)^2}\right] = 0.$$

Or, si l'on représente par $d$ la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent à l'ellipsoïde (5) au point $(x, y, z)$, on a

$$d^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{(pu - e_3)^2} + \frac{y^2}{(pu - e_2)^2} + \frac{z^2}{(pu - e_1)^2}}.$$

Dès lors (6) devient

$$(7)\qquad \frac{du}{dx} = \frac{2x\,d^2}{(pu - e_3)\,p'u}.$$

Mais on vient de voir que

$$pu - e_3 = a'^2$$

et que

$$p'u = -2\sqrt{(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3)} = -2a'b'c';$$

il en résulte

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x\,d^2}{a'^3 b'c'}. \tag{8}$$

On obtiendrait de même $\frac{du}{dy}$ et $\frac{du}{dz}$.

Ces opérations auxiliaires étant terminées, on peut résoudre la question. On examine d'abord le cas de l'aimantation dirigée suivant le grand axe; on sait qu'alors les composantes de la force magnétique sont

$$X_1 = \frac{d^2P}{dx^2}, \qquad Y_1 = \frac{d^2P}{dx\,dy}, \qquad Z_1 = \frac{d^2P}{dx\,dz},$$

quand l'intensité est l'unité. Or, des formules (1), on déduit

$$\begin{aligned} -X_1 = -\frac{d^2P}{dx^2} &= \frac{3M}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}[\zeta(u + \omega_3) - \eta_3 + e_3 u] \\ &\quad + \frac{3Mx}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}[-p(u + \omega_3) + e_3]\frac{du}{dx} \end{aligned}$$

ou

$$-X_1 = 3M\frac{\zeta(u + \omega_3) - \eta_3 + e_3 u}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} + 3Mx\frac{p(u - \omega_3) - e_3}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}\left(-\frac{du}{dx}\right).$$

Mais

$$\frac{p(u + \omega_3) - e_3}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} = \frac{1}{pu - e_3} = \frac{1}{a'^2}.$$

En tenant compte de cette valeur, ainsi que de (8), on a

$$-X_1 = 3M\left[\frac{\zeta(u + \omega_3) - \eta_3 + e_3 u}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} + \frac{x}{a'^2}\frac{x\,d^2}{a'^3 b'c'}\right].$$

Pour les autres composantes, on trouve

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} -Y_1 = -\frac{d^2P}{dx\,dy} &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{dP}{dy}\right) \\ &= \frac{3My}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}[-p(u + \omega_2) + e_2]\frac{du}{dx} \end{aligned}\right.$$

ou

$$-\mathrm{Y}_1 = 3\mathrm{M}y\,\frac{p(u+\omega_2)-e_2}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}\left(-\frac{du}{dx}\right) = 3\mathrm{M}y\,\frac{1}{pu-e_2}\,\frac{x\,d^2}{a'^3\,b'\,c'};$$

$$-\mathrm{Y}_1 = \frac{3\mathrm{M}\,y}{b'^2}\,\frac{x\,d^2}{a'^3\,b'\,c'}.$$

De même

$$-\mathrm{Z}_1 = \frac{3\mathrm{M}\,z}{c'^2}\,\frac{x\,d^2}{a'^3\,b'\,c'}.$$

On sait que les signes $\pm$ conviennent à la répulsion ou à l'attraction; on peut réunir les formules et rétablir l'intensité

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X}_1 &= 3\mathrm{MI}\left[\frac{\zeta(u+\omega_3)-\eta_3+e_3 u}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)} + \frac{x}{a'^2}\,\frac{x\,d^2}{a'^3\,b'\,c'}\right],\\ \mathrm{Y}_1 &= 3\mathrm{MI}\,\frac{y}{b'^2}\,\frac{x\,d^2}{a'^3\,b'\,c'},\\ \mathrm{Z}_1 &= 3\mathrm{MI}\,\frac{z}{c'^2}\,\frac{x\,d^2}{a'^3\,b'\,c'}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules pourront servir aux calculs numériques si l'argument $u$ est déterminé. Pour cela, on remarquera que $pu - e_1 = c'^2$ donne $pu > e_1$; comme $k^2 = \dfrac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$ est plus petit que 1, $u$ est réel et sa plus petite valeur est

$$(11)\qquad u = \pm\, 2\omega_1 v.$$

On sait que $v$ est donné, avec une très grande approximation, par

$$(12)\qquad \cos 2\alpha v = \frac{\left(1-\frac{a'}{b'}\sqrt{k'}\right)\left(1+\sqrt{k'}\right)}{\left(1-\sqrt{k'}\right)\left(1+\frac{a'}{b'}\sqrt{k'}\right)}.$$

Comme

$$\omega_1 = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{e_1-e_3}} = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{a^2-c^2}},$$

K étant l'intégrale complète elliptique de première espèce calculée par Legendre, correspondant au module $k^2$ et au module complémentaire

$$k'^2 = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2},$$

on peut obtenir

(13)
$$u = \frac{\text{K}}{\pi\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arc\,cos} \frac{\left(1 - \frac{a'}{b'}\sqrt{k'}\right)\left(1 + \sqrt{k'}\right)}{\left(1 - \sqrt{k'}\right)\left(1 + \frac{a'}{b'}\sqrt{k'}\right)}.$$

Il reste à étudier $\zeta(u + \omega_3) - \eta_3$ :

Par la formule d'addition

$$\zeta(u + \omega_3) - \eta_3 = \zeta u + \zeta\omega_3 - \eta_3 + \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'\omega_3}{pu - p\omega_3}$$

ou

(14)
$$\zeta(u + \omega_3) - \eta_3 = \zeta u + \frac{1}{2}\,\frac{p'u}{pu - e_3} = \zeta u - \frac{b'c'}{a'}.$$

Enfin, on développe $\zeta u$ suivant les puissances de $u$ et, retenant les deux premiers termes, on a

(15)
$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{20}\,\frac{u^3}{3} = \frac{1}{u} + \frac{1}{5}(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3)\frac{u^3}{3}.$$

Les égalités (13), (14), (15) permettent donc d'obtenir les valeurs numériques de (10).

Lorsque l'aimantation a lieu suivant l'un des deux autres axes principaux de l'ellipsoïde, on remarquera que, pour écrire les formules correspondantes, les termes en $\zeta$ se rapportent à l'axe de glissement et que les autres termes sont symétriques en $x, y, z$ $(a' b' c')$.

Dans le cas le plus général, celui où l'aimantation a lieu suivant la direction $s$, à cosinus directeurs $(\lambda, \mu, \nu)$, on fera le raisonnement suivant : P étant le potentiel d'un ellipsoïde de densité 1 au point extérieur, $-\frac{d\text{P}}{ds}$ sera le potentiel de la double couche de glissement au même point ; or

$$-\frac{d\text{P}}{ds} = -\left(\frac{d\text{P}}{dx}\lambda + \frac{d\text{P}}{dy}\mu + \frac{d\text{P}}{dz}\nu\right) = \Omega.$$

Comme

$$\text{X}_1 = -\frac{d\Omega}{dx} = \lambda\frac{d^2\text{P}}{dx^2} + \mu\frac{d^2\text{P}}{dx\,dy} + \nu\frac{d^2\text{P}}{dx\,dz},$$

on a

$$(16)\left\{\begin{array}{l} X_1 = 3\,\mathrm{MI}\left[\lambda\dfrac{\zeta(u+\omega_3)-\eta_3+e_3 u}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)} + \dfrac{x\,d^2}{a'^3 b' c'}\left(\dfrac{\lambda x}{a'^2}+\dfrac{\mu y}{b'^2}+\dfrac{\nu z}{c'^2}\right)\right]. \\ \text{De même} \\ Y_1 = 3\,\mathrm{MI}\left[\mu\dfrac{\zeta(u+\omega_2)-\eta_2+e_2 u}{(e_3-e_2)(e_1-e_2)} + \dfrac{y\,d^2}{a' b'^3 c'}\left(\dfrac{\lambda x}{a'^2}+\dfrac{\mu y}{b'^2}+\dfrac{\nu z}{c'^2}\right)\right], \\ Z_1 = 3\,\mathrm{MI}\left[\nu\dfrac{\zeta(u+\omega_1)-\eta_1+e_1 u}{(e_1-e_3)(e_1-e_2)} + \dfrac{z\,d^2}{a' b' c'^3}\left(\dfrac{\lambda x}{a'^2}+\dfrac{\mu y}{b'^2}+\dfrac{\nu z}{c'^2}\right)\right]. \end{array}\right.$$

Il est facile de reconnaître que le facteur

$$\frac{\lambda x}{a'^2}+\frac{\mu y}{b'^2}+\frac{\nu z}{c'^2}$$

est le cosinus que la normale $n$ à l'ellipsoïde (3) au point $(x, y, z)$ fait avec la direction $s$ de l'aimantation, ce cosinus étant divisé par $d$.

La méthode des calculs numériques est applicable aux formules (16). Quand les ellipsoïdes sont de révolution. les termes en $\zeta$ dégénèrent en fonctions circulaires ou logarithmiques; ces expressions sont d'ailleurs obtenues directement dans les auteurs classiques. Cependant un calcul immédiat montre que dans le cas de la sphère, lorsque

$$a' = b' = c' = d = r,$$

on a

$$Y_1 = \frac{3\,\mathrm{MI}\,yx}{r^5} = 3\,\mathrm{MI}\frac{\sin\omega\cos\omega}{r^3},$$

ce qui est bien la formule connue.

# *Groupes abéliens généraux contenus dans les groupes linéaires à moins de sept variables;*

**Par M. Camille JORDAN.**

---

## § I. — Préliminaires.

**1.** On nomme *groupes abéliens* ceux dont les substitutions sont échangeables entre elles.

Soient $G_m$, $G_n$ deux groupes abéliens, respectivement contenus dans les groupes linéaires à $m$ et à $n$ variables. La réunion de leurs substitutions donnera un nouveau groupe abélien contenu dans le groupe linéaire à $m+n$ variables. Un groupe ainsi formé sera dit *réductible*.

Nous nous bornerons à l'étude des groupes *irréductibles* et *généraux,* c'est-à-dire qui ne sont contenus comme sous-groupes dans aucun autre groupe de même nature.

**2.** Soit

$$S = \left| x_i \quad \sum_k a_{ik} x_k \right| \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n, \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

une substitution quelconque de l'un de ces groupes; son déterminant caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} - s & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

égalé à zéro, n'aura qu'une seule racine $s_1$, de l'ordre $n$ de multiplicité.

Supposons, en effet, pour fixer les idées, qu'il ait deux racines différentes $s_1$, $s_2$; par un choix convenable de variables indépendantes, on pourra ramener S à une forme canonique, telle que la suivante :

$$\begin{vmatrix} x_1, & x'_1, & \ldots & s_1 x_1, & s_1 x'_1, & \ldots \\ x_2, & x'_2, & \ldots & s_1(x_2+x_1), & s_1(x'_2+x'_1), & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots \\ y_1, & y'_1, & \ldots & s_2 y_1, & s_2 y'_1, & \ldots \\ \ldots, & \ldots, & \ldots & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots \end{vmatrix}.$$

Une substitution quelconque $S_1$ du groupe G que nous considérons, devant être échangeable à S, devra permuter les unes dans les autres les fonctions linéaires des variables $x_1$, $x'_1$, ...; car ces fonctions sont les seules que S multiplie par $s_1$. Elle permutera de même entre elles les fonctions linéaires de $x_2$, $x'_2$, ..., $x_1$, $x'_1$, ... qui sont les seules que S multiplie par $s_1$ et accroisse en outre de fonctions linéaires de $x_1$, $x'_1$, ..., et ainsi de suite.

Donc $S_1$ remplace chacune des variables $x$ par une fonction linéaire de ces seules variables. De même pour les variables $y$; de sorte que G sera réductible, contrairement à notre hypothèse.

Remarquons d'ailleurs qu'une substitution $s_1$, qui multiplie toutes les variables par un même facteur arbitraire $s_1$, est échangeable à toute substitution linéaire. Elle fera donc partie du groupe G supposé général. Et la substitution S sera le produit de la substitution $s_1$ par une nouvelle substitution S′ dont le déterminant caractéristique n'a d'autre racine que l'unité.

Le problème est donc ramené à la construction des groupes abéliens G dont toutes les substitutions ont pour déterminant caractéristique une puissance de $s-1$.

**3.** Soit S une substitution d'un pareil groupe. En la ramenant à sa forme canonique, on voit qu'il existe certaines variables $x$, $x'$, ... qu'elle n'altère pas. Soient $y$, $y'$, ... les autres variables.

Soit $S_1$ une seconde substitution du groupe. Elle devra permuter

entre elles les fonctions linéaires de $x, x', \ldots$; elle sera donc de la forme

$$\left|\begin{array}{llll} x, x' & \ldots & f(x, x', \ldots), & f_1(x, x', \ldots), \quad \ldots \\ y, y' & \ldots & \varphi(x, x', \ldots, y, y', \ldots), & \varphi_1(x, x', \ldots, y, y', \ldots), \quad \ldots \end{array}\right|.$$

Considérons la substitution partielle opérée sur les $x, x', \ldots$. Son déterminant caractéristique, entrant en facteur dans celui de $S_1$, sera une puissance de $s - 1$. Parmi les fonctions linéaires de $x, x', \ldots$, il en existe donc que $S_1$ n'altère pas.

Soit $S_2$ une nouvelle substitution de G. Elle devra permuter les unes dans les autres ces fonctions que ni S, ni $S_1$ n'altèrent, et parmi elles il y en aura que $S_2$ laisse également invariables.

Il existe donc certaines fonctions inaltérées par toutes les substitutions de G. Prenons-les pour variables indépendantes et désignons-les par $x'_1, x''_1, \ldots$; nous les appellerons *variables de rang* 1; soit $m_1$ leur nombre. Désignons par $y, y', \ldots$ les variables restantes.

Les substitutions de G seront de la forme générale

$$\left|\begin{array}{llll} x'_1, x''_1, & \ldots & x'_1, & x''_1, \quad \ldots \\ y, y', & \ldots & f(y, y', \ldots) + \varphi(x_1, x'_1, \ldots), & f_1(y, y', \ldots) + \varphi_1(x_1, x'_1, \ldots), \quad \ldots \end{array}\right|.$$

Pour qu'elles soient échangeables entre elles, il faut évidemment que les substitutions réduites

$$|y, y', \quad \ldots \quad f(y, y', \ldots), \quad f_1(y, y', \ldots), \quad \ldots|,$$

obtenues en effaçant les variables $x, x', \ldots$, soient échangeables entre elles. Elles laisseront donc invariables certaines fonctions des $y, y', \ldots$. Soient $x'_2, x''_2, \ldots$ celles de ces fonctions qui sont linéairement distinctes; $m_2$ leur nombre. Ce sont les *variables de rang* 2, et toute substitution de G (si elle les altère) les accroîtra d'une fonction linéaire des variables de rang 1.

Poursuivant ce raisonnement, on arrive au résultat suivant :

THÉORÈME. — *Les variables indépendantes étant convenablement*

*choisies, se répartiront ainsi :*

$$\begin{array}{llll} m_1 & \textit{variables} & x'_1, x''_1, \ldots & \textit{de rang } 1, \\ m_2 & \textit{variables} & x'_2, x''_2, \ldots & \textit{de rang } 2, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots, \ldots, \ldots & \ldots\ldots\ldots, \\ m_r & \textit{variables} & x'_r, x''_r, \ldots & \textit{de rang } r. \end{array}$$

*Toute substitution de G laissera inaltérées les variables de rang 1 et accroîtra, en général, chaque variable de rang $k$ d'une fonction linéaire des variables de rang $< k$.*

L'ensemble des nombres $m_1, m_2, \ldots$ constituera pour nous la *signature*

$$[m_1, m_2, \ldots, m_r]$$

du groupe G.

La question à traiter peut donc être formulée ainsi :

*Construire les divers groupes correspondant à une signature donnée.*

4. La marche qui se présente naturellement à l'esprit pour la résoudre est la suivante :

On connaît déjà par le théorème précédent la forme générale des substitutions du groupe cherché G. Soit $\Gamma$ le groupe constitué par l'ensemble de toutes les substitutions de cette forme.

Choisissons arbitrairement l'une d'elles, S, que nous supposerons appartenir à G. Déterminons le sous-groupe $\Gamma_1$ formé par celles des substitutions de $\Gamma$ qui sont échangeables à S ; il contiendra G.

Choisissons arbitrairement dans $\Gamma_1$ une substitution $S_1$ qui ne soit pas échangeable à toutes les autres. Supposons qu'elle appartienne à G ; ce groupe sera contenu dans le sous-groupe $\Gamma_2$ formé par celles des substitutions de $\Gamma_1$ qui sont échangeables à $S_1$.

Choisissons dans $\Gamma_2$ une nouvelle substitution $S_2$, qui ne soit pas échangeable à toutes les autres, et ainsi de suite. Nous arriverons à un dernier sous-groupe $\Gamma_i$ qui soit abélien. Ce sera l'un des groupes cherchés.

Ce procédé de tâtonnement donnera bien tous les groupes G, mais au prix de calculs fort longs; de plus, un même groupe pourra se reproduire sous plusieurs formes différentes, dont une seule devra être conservée, si l'on veut éviter les doubles emplois dans l'énumération des groupes G.

Deux des groupes obtenus ne peuvent, en effet, être considérés comme vraiment distincts, s'ils sont identiques, ou peuvent être rendus tels par le changement des variables indépendantes.

Or, si nous convenons de dire qu'une fonction linéaire des variables $x_k^i$ est de rang $k$, lorsque les variables de rang le plus élevé qui y figurent sont de rang $k$, il est évident que le groupe $\Gamma$ sera transformé en lui-même, si l'on remplace chacune des variables $x_k^i$ par une nouvelle variable indépendante du même rang (à la seule condition que les nouvelles variables soient linéairement distinctes).

Soient G l'un des groupes abéliens contenus dans $\Gamma$; G, G', ... ses divers transformés par les changements de variables ci-dessus; ces groupes ne seront pas distincts et ne devront compter que pour un seul dans l'énumération des groupes cherchés.

Les considérations suivantes permettent d'abréger les opérations que nous venons d'indiquer et d'obtenir la solution effective du problème dans les cas les plus simples.

## § II. — Considérations générales.

5. Une substitution S du groupe $\Gamma$ est complètement définie lorsque l'on connaît l'accroissement $\Delta x_k^i = f_{ik}$ qu'elle fait subir à chacune des variables $x_k^i$. On pourra donc la représenter commodément par la notation

$$S = |\Delta x_1^1 = f_{11}, \ldots, \Delta x_k^i = f_{ik}, \ldots|.$$

On pourra même, pour abréger l'écriture, supprimer l'indication des variables que S laisserait inaltérées.

Soit

$$\varphi = \Sigma \lambda_{ik} x_k^i$$

une fonction linéaire des $x$ à coefficients indéterminés; S lui donnera

l'accroissement

$$\Delta\varphi = \Sigma\lambda_{ik}\Delta x_k^i$$

et l'on pourra écrire, sous une forme plus condensée,

$$S = |\Delta\varphi = \Sigma\lambda_{ik} f_{ik}|.$$

Soit $S_1$ une autre substitution de $\Gamma$, qui accroisse $\varphi$ de $\Delta_1\varphi$. La substitution $SS_1$ transforme $\varphi$ en

$$\varphi + \Delta\varphi + \Delta_1(\varphi + \Delta\varphi) = \varphi + \Delta\varphi + \Delta_1\varphi + \Delta_1\Delta\varphi.$$

De même $S_1 S$ la changera en

$$\varphi + \Delta\varphi + \Delta_1\varphi + \Delta\Delta_1\varphi.$$

La condition pour que S et $S_1$ soient échangeables est donc exprimée par la relation

$$\Delta_1\Delta\varphi = \Delta\Delta_1\varphi$$

qui doit avoir lieu identiquement, quelle que soit la fonction linéaire $\varphi$.

En égalant séparément les coefficients de chacune des arbitraires $\lambda_{ik}$ dans la relation précédente, on obtiendra celles-ci

$$\Delta_1\Delta x_k^i = \Delta\Delta_1 x_k^i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m_k \\ k = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix},$$

dont elle est le résumé.

6. Si deux opérations $\Delta$ et $\Delta_1$ peuvent être interverties, comme l'exprime cette égalité, il en sera de même des opérations

$$D = a_1\Delta + a_2\Delta^2 + a_3\Delta^3 + \ldots \qquad \text{et} \qquad \Delta_1,$$

$a_1, a_2, \ldots$ étant des constantes arbitraires. Donc tout groupe abélien G qui contient la substitution S contiendra (s'il est général, comme on le suppose) la substitution $\Sigma$ qui accroît $\varphi$ de $D\varphi$. En effet, soit $S_1$ une substitution quelconque de G; étant échangeable à S, elle le sera à $\Sigma$. Si donc $\Sigma$ n'appartenait pas à G, on pourrait la lui adjoindre pour former un groupe abélien plus général.

Nous appellerons ces substitutions $\Sigma$ les *dérivées* de S. En particulier, nous appellerons *multiples* de S celles pour lesquelles l'opération D se réduit à $a_1 \Delta$.

De même, si G contient plusieurs substitutions $S, S_1, \ldots$ accroissant respectivement $\varphi$ de $\Delta\varphi, \Delta_1\varphi, \ldots$, il contiendra toutes les substitutions $\Sigma$ qui l'accroissent de $D\varphi$, D désignant un polynome symbolique arbitraire en $\Delta, \Delta_1, \ldots$ (sans terme constant). Ces substitutions seront dites les *dérivées* de $S, S_1, \ldots$. En particulier, nous appellerons *combinaisons linéaires* de $S, S_1, \ldots$ et nous représenterons par

$$(aS + a_1 S_1 + \ldots)$$

celles où le polynome D se réduit à la forme linéaire

$$D = a\Delta + a_1 \Delta_1 + \ldots.$$

7. Supposons, pour fixer les idées, qu'on connaisse déjà deux substitutions $S, S_1$ du groupe G. Soit $x$ l'une des variables. Parmi les fonctions linéaires $\Delta x, \Delta_1 x, \Delta^2 x, \Delta\Delta_1 x, \ldots$, soient $y, y', \ldots$ celles qui sont linéairement distinctes. Prenons-les, ainsi que $x$, pour variables indépendantes; soient $z, z', \ldots$ les variables restantes. Une substitution quelconque $S_2$ du groupe G donnera à $x$ un accroissement de la forme

$$\Delta_2 x = ay + a'y' + \ldots + bz + b'z' + \ldots.$$

Mais, parmi les substitutions dérivées de $S, S_1$, que l'on sait déjà appartenir à G, il en est une $\sigma$ qui lui donne l'accroissement

$$\delta x = ay + a'y' + \ldots.$$

On peut substituer à $S_2$ comme génératrice du groupe la combinaison linéaire

$$(S_2 - \sigma) = S_2',$$

pour laquelle l'accroissement de $x$ se réduit à

$$\Delta_2' x = bz + b'z' + \ldots.$$

C'est donc uniquement parmi les substitutions ainsi réduites qu'il

conviendra de choisir une substitution échangeable à S, $S_1$, qu'on puisse leur adjoindre pour continuer la construction progressive de G.

**8**. Cette condition d'échangeabilité restreindra d'ailleurs beaucoup le champ des hypothèses possibles sur la nature de la nouvelle substitution $S'_2$.

Supposons, pour en donner un exemple qui sera utile plus tard, que l'on ait $b = b' = \ldots = 0$, de telle sorte que $\Delta'_2 x$ soit nul; $\Delta'_2 y$, $\Delta'_2 y'$, ... le seront également. En effet, $S'_2$ étant échangeable à $\sigma$, on aura nécessairement

$$\Delta'_2\, \delta x = \delta\, \Delta'_2 x = 0,$$

car $\Delta'_2 x$ est nul.

Mais, d'autre part,

$$\Delta'_2\, \delta x = a\,\Delta'_2 y + a'\,\Delta'_2 y' + \ldots$$

et, pour que cette expression s'annule, quelles que soient les constantes $a$, $a'$, ..., il faudra qu'on ait

$$\Delta'_2 y = 0, \qquad \Delta'_2 y' = 0, \qquad \ldots.$$

**9**. Comme cas particulier du précédent, considérons celui où les variables $x$, $y$, $y'$, ... épuisent le nombre des variables indépendantes; il n'y aura pas de variables $z$, et $S'_2$ n'altérant aucune variable se réduira à l'unité. Il n'existera donc aucune substitution nouvelle qu'on puisse adjoindre au groupe dérivé des substitutions S, $S_1$ déjà connues et ce groupe sera général.

**10**. Il existe dans le groupe $\Gamma$ certaines substitutions $\sigma$ échangeables à toutes les autres et qui, par suite, appartiendront à tous les groupes G contenus dans $\Gamma$. Ce sont celles qui n'altèrent aucune variable, sauf celles de rang maximum $x'_r$, $x''_r$, ..., qu'elles accroissent de fonctions arbitraires $\delta x'_r$, $\delta x''_r$, ..., des variables de rang 1. Elles accroîtront, en effet, la fonction arbitraire

$$\varphi = \Sigma \lambda_{ik} x$$

de la quantité

$$\delta\varphi = \lambda_{1r}\, \delta x'_r + \lambda_{2r}\, \delta x''_r + \ldots.$$

Soit S une autre substitution de $\Gamma$; elle accroîtra $\varphi$ d'une fonction $\Delta\varphi$ qui ne contient que des variables de rang $< r$. On aura donc

$$\delta\,\Delta\varphi = 0.$$

Mais, d'autre part, $\delta\varphi$ étant de rang 1, on aura

$$\Delta\,\delta\varphi = 0.$$

La condition d'échangeabilité est donc remplie.

On remarquera que le succès de ce raisonnement tient à cette circonstance que $x'_r$, $x''_r$, ... ne figurent pas dans $\Delta\varphi$. Ces variables de rang maximum sont les seules qui jouissent de cette propriété, quelle que soit la fonction $\varphi$ et de quelque manière que S soit choisie dans le groupe $\Gamma$.

Mais si la substitution S doit être choisie, non plus dans toute l'étendue du groupe $\Gamma$, mais dans un de ses sous-groupes $\Gamma_1$, il peut arriver que certaines variables, de rang $< r$, ne figurent pourtant pas dans les $\Delta\varphi$. Les substitutions $\sigma'$, qui n'altèrent que ces variables, en les accroissant de fonctions arbitraires des variables de rang 1, seront échangeables à toutes celles de $\Gamma_1$; elles appartiendront donc à tout groupe abélien G contenu dans $\Gamma_1$, et supposé général.

**11.** Soit $x_k$ l'une des variables de rang $k$. Les diverses substitutions S, $S_1$, ... du groupe G lui donneront des accroissements $\Delta x_k$, $\Delta_1 x_k$, ... de rang $k-1$ *au plus*. Mais l'un au moins d'entre eux sera effectivement de rang $k-1$. Autrement ce serait à tort qu'on aurait inscrit $x_k$ comme variable de rang $k$; elle serait, en réalité, de rang inférieur.

Nous allons établir que G contient une substitution S pour laquelle $\Delta x_k$, $\Delta^2 x_k$, ..., $\Delta^{k-1} x_k$ soient respectivement de rangs $k-1$, $k-2$, ..., 1.

Supposons, en effet, qu'on ait trouvé déjà une substitution S pour laquelle $\Delta x_k$, ..., $\Delta^{l-1} x_k$ soient respectivement de rangs $k-1$, ..., $k-l+1$, mais où $\Delta^l x_k$ soit de rang $< k-l$.

Puisque $\Delta^{l-1} x_k$ est de rang $k-l+1$, G contiendra une substitution $S_1$ qui l'accroît d'une fonction de rang $k-l-1$.

Soient $\Delta\varphi$, $\Delta_1\varphi$ les accroissements que S, $S_1$ donnent à la fonction arbitraire $\varphi$; G contiendra la combinaison linéaire

$$\Sigma = (S + \varepsilon S_1),$$

$\varepsilon$ étant un infiniment petit. Cette substitution accroît $\varphi$ de

$$D\varphi = (\Delta + \varepsilon \Delta_1)\varphi.$$

Répétant cette opération, on aura

$$D^l\varphi = (\Delta + \varepsilon\Delta_1)^l\varphi$$

et, en particulier,

$$D^l x_k = (\Delta + \varepsilon\Delta_1)^l x_k = (\Delta^l + l\varepsilon\Delta_1\Delta^{l-1} + \ldots)x_k.$$

Or, par hypothèse, $\Delta^l x_k$ est de rang $< k - l$ et $\Delta_1\Delta^{l-1}x_k$ de rang $k - l$; les termes non écrits peuvent être du même rang; mais, étant infiniment petits par rapport aux précédents, ils ne peuvent les détruire. Donc $D^l x_k$ aura le rang $k - l$ et $D^l x_k$, $D^{l-1}x_k$, $\ldots$, $x_k$ étant de rangs croissants, dont le dernier est $k$, leurs rangs respectifs seront bien $k - l$, $k - l + 1$, $\ldots$, $k$.

Soit S la substitution dont nous venons d'établir l'existence. Désignons par $x_k$, $x_{k-1}$, $\ldots$, $x_1$ les fonctions $x_k$, $\Delta x_k$, $\ldots$, $\Delta^{k-1}x_k$. Étant de rangs décroissants, elles seront linéairement distinctes. Prenons-les pour variables indépendantes. La substitution S prendra, en ce qui concerne ces variables, la forme suivante :

$$\Delta x_k = x_{k-1}, \qquad \Delta x_{k-1} = x_{k-2}, \qquad \ldots, \qquad \Delta x_1 = 0.$$

**12.** Soient S, $S_1$ deux substitutions d'un groupe G de signature $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$. Nous avons trouvé pour exprimer leur échangeabilité les conditions suivantes (n° **5**) :

$$\Delta_1\Delta x_k^i = \Delta\Delta_1 x_k^i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m_k \\ k = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}.$$

Si nous nous bornons à considérer celles de ces identités où $k = \rho$, elles exprimeront que les substitutions effectuées sur les variables

des $\rho$ premiers rangs seulement sont échangeables. L'ensemble de ces substitutions partielles (correspondant aux diverses substitutions S, $S_1$, ... du groupe G) formera donc un groupe abélien de signature $[m_1, \ldots, m_\rho]$; mais ce groupe pourra ne pas être général dans son espèce.

On peut même négliger, parmi celles des identités où $k = \rho$, toutes celles où $i > \mu$, $\mu$ étant un entier moindre que $m_\rho$; les identités restantes exprimeront l'échangeabilité des substitutions partielles opérées sur les variables de rang $< \rho$ et les $\mu$ premières variables de rang $\rho$. L'ensemble de ces substitutions partielles formera donc un groupe abélien de signature $[m_1, \ldots, m_{\rho-1}, \mu]$, mais qui pourra ne pas être général.

Parmi les conditions conservées jusqu'à présent, effaçons encore toutes celles où $k < \sigma$ et, dans celles qui subsistent, supprimons dans les deux membres les termes qui contiennent les variables de rang $< \sigma$. Les conditions ainsi restreintes expriment que les altérations produites par S, $S_1$, ... sur les variables des rangs $\sigma, \ldots, \rho - 1$ et les $\mu$ premières variables de rang $\rho$ seraient échangeables si l'on y biffait les termes qui contiennent les variables de rang $< \sigma$. Les substitutions restreintes ainsi obtenues formeront encore un groupe abélien, de signature $[m_\sigma, \ldots, m_{\rho-1}]$.

On voit par là que la détermination des groupes abéliens généraux de signatures simples, telles que $[m_1, m_2]$, $[m_1, m_2, m_3]$, ... et de leurs divers sous-groupes constituerait un premier pas assez important vers la solution du problème général relatif à une signature quelconque $[m_1, m_2, \ldots]$.

**15.** Avant de passer aux applications particulières des principes ci-dessus, il convient encore de remarquer qu'il existe certaines signatures auxquelles ne correspond aucun groupe G. Nous allons montrer, par exemple, l'impossibilité de la signature $[m_1, 1, 2]$.

Supposons, en effet, qu'il existe un groupe G ayant cette signature; soient $x_2$ la variable de rang 2, $x_3$, $x'_3$ celles de rang 3. Une substitution quelconque S du groupe G donnera à $x_3$, $x'_3$ des accroissements de la forme

$$\Delta x_3 = a x_2 + R_1, \qquad \Delta x'_3 = a' x_2 + R_1,$$

en désignant, d'une façon générale, par $R_1$ une fonction des variables de rang 1, qu'il est inutile de préciser et qui ne sera pas partout la même.

La variable $x_3$ étant de rang 3, G contient au moins une substitution S où $a$ n'est pas nul et, si nous changeons de variables, en posant

$$x_3 = aX_3, \qquad a'x_3 - ax'_3 = X'_3,$$

nous aurons plus simplement

$$\Delta X_3 = x_2 + R_1, \qquad \Delta X'_3 = R_1.$$

Les substitutions de G seront des combinaisons linéaires de celle-là avec d'autres substitutions $S_1, \ldots$ donnant à $X_3$, $X'_3$ des accroissements de la forme

$$\Delta_1 X_3 = R_1, \qquad \Delta_1 x'_3 = bx_2 + R_1.$$

Mais, $X'_3$ étant une variable de rang 3, il existe au moins une substitution $S_1$ pour laquelle $b$ n'est pas nul, et, comme on peut remplacer la substitution $S_1$ par un de ses multiples, il est permis de supposer $b = 1$.

Les substitutions de G seront évidemment des combinaisons linéaires de S, $S_1$ avec d'autres substitutions $\Sigma$ pour lesquelles les accroissements de $X_3$, $X'_3$ se réduiront à la forme

$$DX_3 = R_1, \qquad DX'_3 = R_1.$$

Cela posé, aucune des substitutions S, $S_1$, $\Sigma$ ne pourra altérer $x_2$. Soit, en effet, $\Delta x_2$ l'accroissement que lui donne S; on aura

$$\Delta_1 \Delta X_3 = \Delta_1(x_2 + R_1) = \Delta_1 x_2$$

et, d'autre part,

$$\Delta \Delta_1 X_3 = \Delta R_1 = 0.$$

Donc $\Delta_1 x_2 = 0$.

On trouvera de même

$$\Delta_1 \Delta X'_3 = \Delta_1 R_1 = 0, \qquad \Delta \Delta_1 X'_3 = \Delta(x_2 + R_1) = \Delta x_2,$$

$$\Delta_1 DX'_3 = \Delta_1 R_1 = 0, \qquad D\Delta_1 X'_3 = D(x_2 + R_1) = Dx_2,$$

d'où

$$\Delta x_2 = 0, \qquad D x_2 = 0.$$

Donc $x_2$, n'étant altérée par aucune des substitutions dont G est dérivé, est une variable de rang 1 et non de rang 2, comme on l'avait supposé, de sorte que la signature du groupe n'est pas $[m_1, 1, 2]$, mais $[m_1 + 1, 2]$.

**14.** De l'impossibilité de la signature $[m_1, 1, 2]$, qui vient d'être établie, résulte évidemment (n° **12**) celle de toute signature de la forme $[m_1, \ldots, m_{k-1}, 1, m_{k+1}, \ldots, m_r]$, où l'un des nombres $m_{k+1}, \ldots, m_r$ serait plus grand que l'unité.

## § III. — Applications.

### 1° *Groupe de signature* $[m, n]$.

**15.** Les substitutions de $\Gamma$ ne sont autres que les substitutions $\sigma$ du numéro **10**. Le groupe G, qui doit les contenir toutes, n'est autre que $\Gamma$ lui-même.

Ses substitutions sont des combinaisons linéaires de $mn$ substitutions distinctes dont chacune laisse inaltérées toutes les variables, sauf l'une de celles de rang 2, $x'_2, \ldots, x''_2$, qu'elle accroît de l'une des variables de rang 1, $x'_1, \ldots, x'''_1$.

**16.** Un sous-groupe $g$ contenu dans G sera dit d'*espèce p*, si toutes ses substitutions sont des combinaisons linéaires de $p$ substitutions distinctes $S_1, \ldots, S_p$.

Une quelconque $S_i$ de ces substitutions accroîtra une quelconque des variables de rang 2, telle que $x^k_2$, d'une certaine fonction linéaire $\varphi_{ik}$ des variables $x_1$ de rang 1.

La substitution générale de $g$, $(\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_p S_p)$, donnera donc à la fonction générale de rang 2

$$\mu_1 x'_2 + \ldots + \mu_n x''_2,$$

l'accroissement

$$D(\mu_1 x'_2 + \ldots + \mu_n x''_2) = \Sigma\lambda_i \Sigma\mu_k \varphi_{ik} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, p, \\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Le second membre est une fonction trilinéaire par rapport aux trois séries de variables $\lambda$, $\mu$, $x$. On dispose pour la réduire à une forme canonique des opérations suivantes :

1° Une substitution linéaire arbitraire opérée sur les $x_1$;

2° Une substitution linéaire opérée sur les $\mu$;

3° Une substitution linéaire opérée sur les $\lambda$.

Ces deux dernières opérations altéreraient les expressions

$$\mu_1 x'_2 + \ldots + \mu_n x''_2,$$
$$\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_p S_p.$$

Mais on les ramènera à leur forme initiale en exécutant les substitutions inverses des précédentes sur les $x_2$ et sur les S; opérations permises, car on peut changer, d'une part, les variables indépendantes, et, d'autre part, remplacer $S_1, \ldots, S_p$ comme génératrices du groupe $g$ par $p$ de leurs combinaisons linéaires.

On aura donc autant de sous-groupes $g$ de l'espèce $p$ qu'il existe de formes réduites distinctes pour la fonction trilinéaire

$$\Sigma\Sigma\lambda_i \mu_k \varphi_{ik}.$$

La construction de ces réduites est un problème assez complexe; nous l'avons abordé dans un précédent Mémoire (*Journal de Liouville*, 1906, p. 403 et 1907, p. 5) et nous en avons donné la solution : 1° dans le cas où l'un des nombres $m$, $n$, $p$ est égal à 1 ou à 2; 2° dans celui où

$$m = n = p = 3.$$

2° *Groupe de signature* $[m, 1, 1, 1, \ldots, 1]$.

**17.** Soit $x_r$ la variable unique de rang maximum $r$. Le groupe cherché G contient (n° **11**) une substitution S pour laquelle on a

$$\Delta x_r = x_{r-1}, \qquad \Delta x_{r-1} = x_{r-2}, \qquad \ldots, \qquad \Delta x_1 = 0,$$

$x_{r-1}, \ldots, x_1$ étant des variables de rangs $r-1, \ldots, 1$.

Soient $x'_1, x''_1, \ldots$ les $m-1$ autres variables de rang 1; G contiendra, en outre (n° **10**), les substitutions $\sigma$ qui accroissent $x_r$ d'une fonc-

tion linéaire de $x'_1, x''_1, \ldots$, sans altérer aucune des autres variables.

Les substitutions dérivées de S et des $\sigma$ donneront aux diverses variables des accroissements de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}x_r &= a_1 x_{r-1} + a_2 x_{r-2} + a_3 x_{r-3} + \ldots + a_{r-1} x_1 + b_1 x'_1 + b_2 x''_1 + \ldots,\\
\mathrm{D}x_{r-1} &= a_1 x_{r-2} + a_2 x_{r-3} + \ldots + a_{r-2} x_1,\\
\mathrm{D}x_{r-2} &= a_1 x_{r-3} + \ldots + a_{r-3} x_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{D}x_1 &= \mathrm{D}x'_1 = \mathrm{D}x''_1 = \ldots = 0,
\end{aligned}$$

où les coefficients $a$, $b$ peuvent prendre toutes les valeurs possibles.

Ces substitutions, permettant d'accroître $x_r$ d'une fonction linéaire quelconque des autres variables, épuiseront toutes celles du groupe cherché (n° **9**).

On n'a donc ici encore qu'*un seul* groupe G de la signature demandée.

3° *Groupes de signature* $[m, n, 1]$.

**18.** Soient $x_3$ la variable unique de rang 3; $x'_2, \ldots, x^n_2$ celles de rang 2; $x'_1, \ldots, x^m_1$ celles de rang 1.

G contient les substitutions $\sigma$ du numéro **10** et résulte (n° **7**) de leur combinaison avec des substitutions $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots$ pour lesquelles on a simplement

$$\begin{aligned}
\Delta_1 x_3 &= \varphi_1, & \Delta_1 x^k_2 &= f_{1k},\\
\Delta_2 x_3 &= \varphi_2, & \Delta_2 x^k &= f_{2k},\\
&\ldots\ldots, & &\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

les $\varphi$ étant des fonctions de $x'_2, \ldots, x^n_2$ (qui ne sont pas toutes nulles) et les $f$ des fonctions de $x'_1, \ldots, x^m_1$.

Supposons que parmi les fonctions $\varphi$ il y en ait $l$ linéairement distinctes. En les prenant pour variables indépendantes, nous aurons $l$ substitutions $\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_l$, telles que, pour l'une quelconque d'entre elles $\mathrm{S}_i$, on ait les accroissements

$$\Delta_i x_3 = x^i_2, \qquad \Delta_i x^k_2 = f_{ik} \qquad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, l \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{array}\right).$$

G résultera de la combinaison de $\sigma$, $S_1$, ..., $S_l$ avec d'autres substitutions $\sigma'$ qui laissent invariable $x_3$ et, par suite, $x'_1, \ldots, x'''_l, x'_2, \ldots, x^l_2$ (**8**). Si donc $l$ était égal à $n$, les substitutions $\sigma'$ se réduiraient à la seule substitution 1, et la construction de G s'arrêterait là.

Supposons, au contraire, $l < n$ pour rester dans l'hypothèse la plus générale. Les substitutions $\sigma'$ accroîtront $x_2^{l+1}, \ldots, x_2^n$ de fonctions linéaires $\psi_{l+1}, \ldots, \psi_n$ des variables de rang 1. D'ailleurs, quelles que soient ces fonctions $\psi_i, \ldots, \sigma'$ sera échangeable aux substitutions $\sigma$, $S_1, \ldots, S_l$ (**10**). Donc G sera dérivé des substitutions $\sigma$, $S_1, \ldots, S_l, \sigma'$.

Mais, en combinant les $\sigma'$ avec $S_1, \ldots, S_l$, on pourra simplifier l'expression de ces dernières substitutions en les remplaçant par d'autres substitutions génératrices $S'_1, \ldots, S'_l$, pour lesquelles toutes celles des fonctions $f_{ik}$ où $k > l$ soient nulles.

Le groupe G sera ainsi dérivé des substitutions $\sigma'$ et d'un groupe G' de substitutions d'où les variables $x_2^{l+1}, \ldots, x_2^n$ ont disparu. Ce dernier groupe, de signature $[m, l, 1]$, sera dérivé des substitutions $\sigma$, jointes à des substitutions $S'_1, \ldots, S'_l$ de la forme suivante :

$$S'_i = |\Delta_i x_3 = x_2^i, \ \Delta_i x_2^k = f_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, l \\ k = 1, 2, \ldots, l \end{pmatrix}.$$

**19.** Nous n'avons pas encore exprimé que ces substitutions S' sont échangeables deux à deux. Cette condition donne les relations

$$\Delta_i \Delta_k x_3 = \Delta_k \Delta_i x_3,$$

d'où

$$f_{ik} = f_{ki}.$$

Les $f$ se réduiront donc à $\frac{l(l+1)}{2}$ fonctions distinctes, contenant chacune $m$ coefficients arbitraires. Mais le nombre de ces paramètres peut être réduit par un choix convenable des variables indépendantes et des substitutions génératrices.

Considérons, en effet, la substitution

$$(\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_l S_l),$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ sont des indéterminées. Elle accroîtra $x_3$ de la quantité

$$Dx_3 = \lambda_1 x_2' + \ldots + \lambda_l x_2^l$$

et $x_2^k$ de la quantité

$$Dx_2^k = \lambda_1 f_{1k} + \ldots + \lambda_l f_{lk} = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_k},$$

$\psi$ désignant la forme quadratique

$$\frac{1}{2}\sum_i\sum_k f_{ik}\lambda_i\lambda_k.$$

D'ailleurs, les $f_{ik}$ étant des fonctions linéaires des $m$ variables $x_1', \ldots, x_1^m$, on aura, en les mettant en évidence,

$$\psi = x_1'\psi_1 + \ldots + x_1^m\psi_m,$$

$\psi_1, \ldots, \psi_m$ étant des fonctions quadratiques des $\lambda$.

Soient enfin $\mu_1, \ldots, \mu_l$ de nouvelles indéterminées; on aura

$$D(\mu_1 x_2' + \ldots + \mu_l x_2^l) = \sum_k \mu_k \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_k} = \sum_i x_1^i \sum_k \mu_k \frac{\partial\psi_i}{\partial\lambda_k}.$$

Le second membre de cette égalité est un covariant de la forme $\psi$ (une polaire), lorsqu'on y soumet les deux séries de variables $\lambda$ et $\mu$ à la même substitution. On peut le faire sans altérer les expressions

$$\lambda_1 x_2' + \ldots + \lambda_l x_2^l, \qquad \mu_1 x_2' + \ldots + \mu_l x_2^l,$$
$$\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_l S_l,$$

pourvu qu'on opère la substitution inverse sur les $x_2$ et sur les S.

On aura donc après cette transformation

$$(1)\quad \begin{cases} Dx_3 = \lambda_1 x_2' + \ldots + \lambda_l x_2^l, \\ D(\mu_1 x_2' + \ldots + \mu_l x_2^l) = \sum_k \mu_k \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_k} = \sum_i x_1^i \sum_k \mu_k \frac{\partial\Psi_i}{\partial\lambda_k}, \end{cases}$$

$\Psi$, $\Psi_i$ désignant les transformées de $\psi$, $\psi_i$ par la substitution opérée sur les $\lambda$. D'ailleurs, on peut soumettre également les $x_1$ à une substi-

tution linéaire quelconque. On voit donc que le problème de construire les groupes G′ revient à déterminer les formes canoniques distinctes à l'une desquelles peut être ramené le réseau

$$\psi = x'_1 \psi_1 + \ldots + x_1^m \psi_m$$

dérivé de $m$ formes quadratiques à $l$ variables.

En effet, si la forme réduite $\Psi$ est connue, on n'aura qu'à remplacer D par sa valeur $\lambda_1 \Delta_1 + \ldots + \lambda_p \Delta_p$ dans les relations (1) et à égaler les coefficients des indéterminées $\lambda$ et $\mu$ dans les deux membres pour obtenir explicitement toutes les quantités $\Delta_i x_3$, $\Delta_i x_2^k$ et connaître, par suite, les substitutions $S_i$.

**20**. Parmi les types réduits $\Psi$, il en existe dans lesquels quelques-unes des variables $x_1$ ou des variables $\lambda$ ont disparu.

Soit $N_{ml}$ le nombre des réduites restantes qui contiennent toutes les variables. Le nombre total des réduites possibles sera évidemment

$$\sum_i \sum_k N_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, l \end{pmatrix}$$

et celui des réduites où figurent tous les $\lambda$, avec tout ou partie des $x_1$, sera

$$\sum_i N_{il} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Ces dernières réduites sont, d'ailleurs, les seules auxquelles correspondent des groupes G′ ayant la signature demandée. En effet, si l'on suppose que l'une des variables $\lambda$, telle que $\lambda_k$, ne figure pas dans $\Psi$, on aura, d'après les relations (1), $Dx_2^k = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_k} = 0$, d'où

$$\Delta_1 x_2^k = \Delta_2 x_2^k = \ldots = 0$$

et la variable $x_2^k$, inaltérée par toute substitution de G′, ne serait pas de rang 2, mais de rang 1.

Le nombre des groupes G′ correspondant à une valeur donnée de $l$

sera donc

$$\sum_i \mathrm{N}_{il}.$$

Chacun d'eux concourt à la formation d'un groupe G. D'ailleurs, $l$ peut prendre successivement toutes les valeurs de 1 à $n$.

Le nombre total des groupes G de signature $[m, n, 1]$ sera donc

$$(2) \qquad \sum_l \sum_i \mathrm{N}_{il} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

**21**. Pour la détermination de ces nombres N, nous renverrons au Mémoire déjà cité (*Journal de Liouville*, 1906, p. 403), auquel nous empruntons les résultats suivants :

$$\mathrm{N}_{il} = 0, \qquad \text{si} \qquad i > \frac{l(l+1)}{2},$$

$$\mathrm{N}_{il} = 1, \qquad \text{si} \qquad i = \frac{l(l+1)}{2},$$

$$\mathrm{N}_{1l} = 1,$$

$$\mathrm{N}_{21} = 0, \qquad \mathrm{N}_{22} = 2, \qquad \mathrm{N}_{23} = 6, \qquad \mathrm{N}_{24} = 14,$$

$$\mathrm{N}_{33} = 13, \qquad \mathrm{N}_{43} = 8, \qquad \mathrm{N}_{53} = 5, \qquad \mathrm{N}_{63} = 1.$$

On en déduit aisément, par la formule (2), le Tableau suivant du nombre des groupes G pour toutes les valeurs de $n$ qui ne surpassent pas 3 :

| $m =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $m > 5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $n = 2$ | 2 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| $n = 3$ | 3 | 11 | 25 | 33 | 38 | 39 |

4° *Groupes de signature* $[1, n, 1, 1, \ldots, 1]$.

**22**. Soit $x_r$ la variable de rang maximum; G contiendra (**11**), outre les substitutions $\sigma$ du n° **10**, une substitution S, pour laquelle on aura

$$\Delta x_r = x_{r-1}, \qquad \Delta x_{r-1} = x_{r-2}, \qquad \ldots, \qquad \Delta x_1 = 0,$$

$x_r, x_{r-1}, \ldots, x_1$ étant de rang $r, r-1, \ldots, 1$ et pouvant être choisies comme variables indépendantes.

Soient $x'_2, \ldots, x_2^{n-1}$ les variables de rang 2, autres que $x_2$; S leur donnera des accroissements de la forme

$$\Delta x'_2 = a' x_1, \qquad \Delta x''_2 = a'' x_1, \qquad \ldots.$$

Mais on annulera ces accroissements si l'on prend pour variables

$$x'_2 - a' x_2, \qquad x''_2 - a'' x_2, \qquad \ldots.$$

Nous pouvons donc supposer qu'on ait

$$\Delta x'_2 = 0, \qquad \Delta x''_2 = 0 \qquad \ldots.$$

Cela posé, G résultera (7) de la combinaison des substitutions $\sigma$, S avec d'autres substitutions $S_1, S_2, \ldots$ qui donnent respectivement à $x_r$ des accroissements

$$\Delta_1 x_r = \varphi_1, \qquad \Delta_2 x_r = \varphi_2, \qquad \ldots,$$

les $\varphi$ étant des fonctions des seules variables $x'_2, x''_2, \ldots$, en nombre $n-1$.

Supposons que, parmi ces fonctions, il y en ait $l$ linéairement distinctes ($l$ pourra être égal à l'un des nombres $0, 1, \ldots, n-1$). En les prenant pour variables indépendantes, on aura simplement, pour les substitutions $S_1, \ldots, S_l$,

$$\Delta_1 x_r = x'_2, \qquad \Delta_2 x_r = x''_2, \qquad \ldots, \qquad \Delta_l x_r = x^l_2.$$

Ces substitutions n'altéreront d'ailleurs aucune des variables $x_{r-1}, \ldots, x_2, x_1$. On a, en effet, par exemple,

$$\Delta_1 x_{r-k} = \Delta_1 \Delta^k x_r = \Delta^k \Delta_1 x_r = \Delta^k x'_2 = 0.$$

Quant aux variables $x'_2, \ldots, x''_2$ elles leur donneront des accroissements de la forme

$$\Delta_i x^k_2 = a_{ik} x_1.$$

Cela posé, le groupe G sera dérivé de la combinaison des substitu-

tions $\sigma$, S, $S_1$, .. , $S_l$ avec d'autres substitutions $\sigma'$ qui laissent inaltéré $x_r$ et, par suite, $x_{r-1}, \ldots, x_1, x'_2, \ldots, x^l_2$ (**8**). Quant à $x_2^{l+1}, \ldots, x_2^n$, elles les accroîtront de multiples de $x_1$. Quels que soient ces multiples, la substitution $\sigma'$ appartiendra à G (**10**).

Le groupe G sera donc dérivé des substitutions $\sigma$, $\sigma'$, S, $S_1$. ..., $S_l$. En combinant ces dernières substitutions avec les $\sigma'$, on obtiendra des substitutions génératrices plus simples $S'_1, \ldots, S'_l$, où ceux des $\Delta_i x^k_2$, pour lesquels $k > l$ seront tous nuls.

Après cette simplification, les substitutions $\sigma$, $S'_1, \ldots, S'_l$ ne contiendront plus les variables $x_2^{l+1}, \ldots, x_2^n$ et formeront un groupe abélien G', de signature $[1, l+1, 1, 1, \ldots]$, dont la combinaison, avec les substitutions $\sigma'$, donnera G.

**25.** Les substitutions $S'_1, \ldots, S'_l$ sont de la forme

$$S'_i = | \Delta_i x_r = x^i_2, \ \Delta_i x^k_2 = a_{ik} x_1 | \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, l \\ k = 1, 2, \ldots, l \end{pmatrix}.$$

Elles sont échangeables deux à deux, ce qui donne les relations

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

La réduction à la forme canonique du groupe G' peut s'effectuer comme au n° **19**.

La substitution

$$(\lambda_1 S'_1 + \ldots + \lambda_l S'_l)$$

donne, en effet, à $x_r$ l'accroissement

$$Dx_r = \lambda_1 x'_2 + \ldots + \lambda_l x^l_2$$

et à la fonction linéaire

$$\mu_1 x'_2 + \ldots + \mu_l x^l_2$$

l'accroissement

$$D(\mu_1 x'_2 + \ldots + \mu_l x^l_2) = x_1 \sum \mu_k \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_k},$$

$\psi$ désignant la forme quadratique

$$\psi = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}\lambda_i\lambda_k$$

En opérant sur les indéterminées $\lambda$ et $\mu$ une même substitution linéaire et la substitution inverse sur les $x_2$ et sur les S', on n'altérera pas les expressions

$$\lambda_1 S' + \ldots + \lambda_l S'_l,$$
$$\lambda_1 x'_2 + \ldots + \lambda_l x^l_2,$$
$$\mu_1 x'_2 + \ldots + \mu_l x^l_2,$$

mais on transformera $\psi$ en une somme de carrés

$$\psi = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_l^2)$$

contenant nécessairement toutes les variables $\lambda$ (*voir* le n° **20**) et sa polaire

$$\sum \mu_k \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_k}$$

en

$$\sum \mu_k \lambda_k.$$

Cette forme canonique étant unique, on voit qu'à chaque valeur de $l$ correspond un seul groupe G' et partant un seul groupe G. Mais on peut assigner successivement à $l$ les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$.

Il existe donc $n$ groupes G ayant pour signature $[1, n, 1, 1, \ldots]$.

5° *Groupes de signature* $[1, m, n]$.

**24.** Il faut supposer ici $m$ et $n$ plus grands que l'unité; car, pour $n=1$, on retomberait sur des cas déjà traités, et, pour $m=1$, $n>1$, le groupe G ne saurait exister (**14**).

Soient $x_1$; $x'_2, \ldots, x^m_2$; $x'_3, \ldots, x^n_3$ les variables.

Le groupe G sera dérivé des substitutions $\sigma$, combinées à d'autres substitutions que, d'après le n° **7**, on peut supposer réduites à la

forme

$$S = |\Delta x_3^l = \varphi_l,\ \Delta x_2^k = a_k x_1,\ \Delta x_1 = 0| \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, m \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

les $\varphi$ étant des fonctions des seules variables $x_2', \ldots, x_2^m$.

Parmi les substitutions de cette forme que G doit contenir, il en est une au moins $S_1$ où $a_1$ n'est pas nul. Autrement $x_2$ ne serait pas de rang 2.

En prenant, d'ailleurs, pour variables indépendantes,

$$\frac{1}{a_1} x_2', \quad a_2 x_2' - a_1 x_2'', \quad \ldots,$$

au lieu de $x_2', x_2'', \ldots$, on rendra $a_1$ égal à l'unité et l'on fera disparaître $a_2, \ldots, a_m$, de sorte que $S_1$ aura la forme

$$S_1 = |\Delta x_3^l = \varphi_{1l},\ \Delta_1 x_2' = x_1,\ \Delta_1 x_2^k = 0 \text{ (pour } k > 1),\ \Delta_1 x_1 = 0|,$$

et G résultera de la combinaison des substitutions $\sigma$, $S_1$ avec de nouvelles substitutions de l'espèce S, mais dans lesquelles on pourra supposer $a_1 = 0$.

Parmi ces nouvelles substitutions, il en est au moins une $S_2$ où $a_2$ n'est pas nul, et, par un changement de variables analogue au précédent, on la ramènera à la forme

$$S_2 = |\Delta_2 x_3^l = \varphi_{2l},\ \Delta_2 x_2'' = x_1,\ \Delta_2 x_2^k = 0 \text{ (si } k \gtrless 2),\ \Delta_2 x_1 = 0|.$$

Continuant ainsi, on voit que G contiendra, outre les $\sigma$, $m$ substitutions $S_1, \ldots, S_m$ ayant les formes suivantes :

$$S_i = |\Delta_i x_3^l = \varphi_{il},\ \Delta_i x_2^i = x_1,\ \Delta_i x_2^k = 0 \text{ (si } k \gtrless i),\ \Delta_i x_1 = 0|,$$

les $\varphi_{il}$ étant des fonctions des $x_2$, telles que

$$\varphi_{il} = a_{i1}^l x_2' + \ldots + a_{im}^l x_2^m.$$

Le groupe cherché G sera, d'ailleurs, dérivé des seules substitutions $\sigma$, $S_1, \ldots, S_m$, car les substitutions qu'on aurait à lui adjoindre

pour le compléter pourraient être supposées de la forme

$$S = |\Delta x_3^l = \varphi_l,\ \Delta x_2^i = 0,\ \Delta x_1 = 0|.$$

Mais les fonctions $\varphi_l$ devraient être toutes nulles.

Soit, en effet,

$$\varphi_l = a_1^l x_2' + \ldots + a_m^l x_2^m;$$

S étant échangeable à $S_i$, on aura

$$\Delta\Delta_i x_3^l = \Delta_i \Delta x_3^l.$$

Mais le premier membre est égal à

$$\Delta\varphi_{il} = 0,$$

car $\varphi_{il}$ ne contient que les variables de rang 2; quant au second membre, il est égal à

$$\Delta_i(a_1^l x_2' + \ldots + a_m^l x_2^m) = a_i^l x_1.$$

Donc $a_i^l = 0$, quels que soient $i$, $l$. Les substitutions S se réduiront donc à la seule substitution 1 qui appartient déjà à G.

**25.** Les substitutions $S_1, \ldots, S_m$ doivent être échangeables deux à deux; d'où les conditions

$$\Delta_i \Delta_k x_3^l = \Delta_k \Delta_i x_3^l.$$

Mais

$$\Delta_i \Delta_k x_3^l = \Delta_i [a_{k1}^l x_2' + \ldots + a_{km}^l x_2^m] = a_{ki}^l x_1$$

$$\Delta_k \Delta_i x_3^l = a_{ik}^l x_1.$$

Donc

$$a_{ik}^l = a_{ki}^l.$$

On pourra écrire en conséquence

$$\Delta_i x_3^l = \frac{\partial \psi_l(x_2', \ldots, x_2^m)}{\partial x_2^i},$$

$\psi_l$ désignant la forme quadratique

$$\psi_l = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}^l x_2^i x_2^k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

La substitution

$$(\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_m S_m)$$

donnera à chacune des variables $x_2^i$ un accroissement

$$Dx_2^i = \lambda_i x_1,$$

et à la fonction

$$\mu_1 x_3' + \ldots + \mu_n x_3^n$$

l'accroissement

$$\begin{aligned} D(\mu_1 x_3' + \ldots + \mu_n x_3^n) &= \sum_l \mu_l \sum_i \lambda_i \frac{\partial \psi_l(x_2', \ldots, x_2^m)}{\partial x_2^i} \\ &= \sum_l \mu_l \sum_i x_2^i \frac{\partial \psi_l(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)}{\partial \lambda_i}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est la polaire par rapport aux $x_2$ de la fonction

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \frac{1}{2} \sum_l \mu_l \psi_l(\lambda_1, \ldots, \lambda_m).$$

L'expression du groupe G étant ainsi trouvée, il est aisé de la réduire à une forme canonique, en changeant les variables indépendantes et les substitutions génératrices.

Opérons, en effet, sur les $\lambda$ une substitution linéaire quelconque, en soumettant les $x_2$ à la même substitution et les S à la substitution inverse. Opérons, d'autre part, sur les $\mu$ une substitution linéaire quelconque et sur les $x_3$ la substitution inverse. Ni $\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_m S_m$, ni $\mu_1 x_3' + \ldots + \mu_n x_3^n$ ne seront changés, et les relations

$$Dx_2^i = \lambda_i x_1$$

subsisteront; mais la fonction $f$ sera changée en une autre fonction

$$F = \frac{1}{2} \sum_l \mu_l \Psi_l(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

et l'on aura

$$D(\mu_1 x_3' + \ldots + \mu_n x_3^n) = \sum_l \mu_l \sum x_2^i \frac{\partial \Psi_l}{\partial \lambda_i}.$$

Nous sommes ainsi ramenés au problème déjà rencontré au n° **19** :

Déterminer les types canoniques distincts à l'un desquels doit se ramener un réseau

$$\mu_1\psi_1+\ldots+\mu_n\psi_n$$

dérivé de $n$ formes quadratiques des $m$ variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, lorsqu'on opère des substitutions linéaires sur les variables $\lambda$ et sur les paramètres $\mu$.

**26.** Le nombre de ces types est

$$\sum_{i,k} \mathrm{N}_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots, m \\ k=1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

les nombres N étant les mêmes qu'aux n^os^ **20-21**. Mais ceux de ces types où $k<n$ doivent être rejetés, les groupes G correspondants n'ayant pas la signature requise.

En effet, si $k$ était $<n$, l'une au moins des variables $\mu$, telle que $\mu_l$, ne figurerait plus dans l'expression de F, ni par suite dans sa polaire. Celle-ci étant égale à

$$\mathrm{D}(\mu_1 x_3'+\ldots+\mu_n x_3^n),$$

on aurait identiquement

$$\mathrm{D}x_3^l=0.$$

Donc toute substitution de G laisserait $x_3^l$ invariable, sauf les substitutions $\sigma$, qui lui donnent un accroissement de rang 1. Donc $x_3^l$ serait de rang 2 et non de rang 3, comme cela doit être.

Le nombre des groupes G, de signature $[1, m, n]$, sera donc

$$\sum_i \mathrm{N}_{in} \qquad i=1, 2, \ldots, m.$$

D'après les valeurs des nombres N, données au n° **21**, on pourra former aisément le Tableau suivant du nombre des groupes G pour les

valeurs de $n$ qui ne surpassent pas 3 :

| $m =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $m>5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $n=2$ | 1 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| $n=3$ | 1 | 7 | 20 | 28 | 33 | 34 |

6° *Groupes de signature* [2, 2, 1, 1, ...].

**27**. Soient $x_r$ la variable de rang maximum ; $x_{r-1}, \ldots ; x_2, x'_2 ; x_1, x'_1$ celles de rang $r-1, \ldots, 2, 1$.

Le groupe G doit contenir, outre les substitutions $\sigma$, une autre substitution S de la forme

$$S = |\Delta x_r = x_{r-1}, \quad \Delta x_{r-1} = x_{r-2}, \quad \ldots, \quad \Delta x_1 = 0, \quad \Delta x'_2 = a x_1 + b x'_1, \quad \Delta x'_1 = 0|.$$

Pour achever de le construire on devra combiner avec les substitutions précédentes de nouvelles substitutions $S_1$ pour lesquelles $\Delta_1 x_r$ se réduise à la forme $c x'_2$ (**7**). Comme $S_1$ est échangeable à S, on aura ensuite

$$\Delta_1 x_{r-1} = \Delta_1 \Delta x_r = \Delta \Delta_1 x_r = \Delta c x'_2 = c(a x_1 + b x'_1),$$
$$\Delta_1 x_{r-2} = \Delta_1 \Delta^2 x_r = \Delta^2 \Delta_1 x_r = \Delta^2 c x'_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Enfin $\Delta_1 x'_2$, $\Delta_1 x'_1$ seront de la forme

$$\Delta_1 x'_2 = \alpha x_1 + \beta x'_1, \qquad \Delta_1 x'_1 = 0.$$

La forme générale des substitutions $S_1$ sera donc

$$(3) \quad S_1 = |\Delta_1 x_r = c x'_2, \ \Delta_1 x_{r-1} = c(a x_1 + b x'_1), \ \Delta_1 x'_2 = \alpha x_1 + \beta x'_1|,$$

les autres $\Delta_1$ étant tous nuls.

Celles des substitutions de cette forme où $c = 0$ sont toutes échangeables entre elles. En les adjoignant simultanément aux substitutions $\sigma$ et S, on obtiendra donc un premier groupe abélien. Ce sera l'un des groupes G que nous voulons construire, car il est général.

Cherchons, en effet, à le compléter par une nouvelle substitution $S_2$. Celle-ci devrait être de la forme (3), et, comme on peut la remplacer par une de ses combinaisons avec les substitutions déjà contenues dans G, on peut supposer que les coefficients $\alpha$, $\beta$, y sont nuls. Donc $S_2$ se réduira à la forme

$$S_2 = |\Delta_2 x_r = c x'_2,\ \Delta_2 x_{r-1} = c(a x_1 + b x'_1),\ \Delta_2 x'_2 = 0|.$$

Elle est, d'ailleurs, échangeable à la substitution

$$S_1 = |\Delta_1 x_r = 0,\ \Delta_1 x_{r-1} = 0,\ \Delta_1 x'_2 = \alpha x_1 + \beta x'_2|,$$

laquelle est contenue dans G, quels que soient $\alpha$ et $\beta$. On aura donc

$$\Delta_1 \Delta_2 x_r = \Delta_2 \Delta_1 x_r.$$

Mais le premier membre est égal à $c(\alpha x_1 + \beta x'_1)$, le second à 0; donc $c = 0$ et $S_2$ se réduit à l'unité.

**28.** Nous obtiendrons d'autres groupes G en adjoignant à $\sigma$, S une substitution $S_1$ où $c$ ne soit pas nul. On peut le supposer égal à 1, car on pourrait remplacer $S_1$ par $\frac{1}{c} S_1$ comme génératrice du groupe. D'ailleurs, la construction du groupe sera achevée après l'adjonction de $S_1$; car les nouvelles substitutions qu'on pourrait essayer de lui ajouter devraient laisser invariable $x_r$ et, par suite, $x_{r-1}, \ldots, x'_2, x_1, x'_1$. Elles se réduiraient donc à l'unité.

Le nouveau groupe que nous venons d'obtenir contient quatre paramètres $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$; mais un changement de variables va nous en débarrasser :

1° Supposons d'abord $b = 0$. En prenant pour variable $x'_2 - a x_2$ au lieu de $x'_2$ on fera disparaître $a$. Si $\beta$ n'est pas nul, on prendra pour variable $\alpha x_1 + \beta x'_1$ au lieu de $x'_1$. On obtiendra ainsi un *second* groupe G, dérivé des $\sigma$, joint aux deux substitutions

$$S = |\Delta x_r = x_{r-1},\ \Delta x_{r-1} = x_{r-2},\ \ldots,\ \Delta x_1 = \Delta x'_2 = \Delta x'_1 = 0|,$$

$$S_1 = |\Delta_1 x_r = x'_2,\ \Delta_1 x_{r-1} = 0,\ \ldots,\ \Delta_1 x_1 = 0,\ \Delta_1 x'_2 = x'_1,\ \Delta_1 x'_1 = 0|.$$

Si $\beta$ était nul, $\Delta_1 x'_2$ ne serait pas égal à $x'_1$, mais à $\alpha x_1$; $\alpha$ n'est pas nul, car $x'_2$, étant de rang 2, ne peut pas rester invariable par toute substitution du groupe. On le réduira à l'unité en changeant

$$x'_2,\ S_1 \qquad \text{en} \qquad x'_2\sqrt{\alpha},\ \ \frac{S_1}{\sqrt{\alpha}}.$$

On a ainsi un *troisième* groupe, où la substitution $S_1$ a la forme

$$S_1 = |\ \Delta_1 x_r = x'_2,\ \Delta_1 x_{r-1} = 0,\ \ldots,\ \Delta_1 x_1 = 0,\ \Delta_1 x'_2 = x_1,\ \Delta_1 x'_1 = 0\ |.$$

**29.** 2° Soit, au contraire, $b \gtrless 0$. Prenons pour variable $a x_1 + b x'_1$, au lieu de $x'_1$; S et $S_1$ seront respectivement réduits aux formes suivantes :

$$S = |\ \Delta x_r = x_{r-1},\ \ldots,\ \Delta x_1 = 0,\ \Delta x'_2 = x'_1,\ \Delta x'_1 = 0\ |,$$
$$S_1 = |\ \Delta_1 x_r = x'_2,\ \Delta_1 x_{r-1} = x'_1,\ \ldots,\ \Delta_1 x'_2 = \alpha x_1 + \beta x'_1,\ \Delta_1 x'_1 = 0\ |.$$

Il est permis de supposer $\beta = 0$, car, s'il en était autrement, on pourrait, par un changement de variables et de substitutions génératrices, ramener ce cas à ceux déjà traités.

Considérons, en effet, la substitution

$$(\lambda S + S_1) = S'.$$

Elle donne aux variables les accroissements suivants :

$$D x_r = \lambda x_{r-1} + x'_2, \qquad D x_{r-1} = \lambda x_{r-2} + x'_1, \qquad D x_{r-2} = \lambda x_{r-3}, \qquad \ldots,$$
$$D x'_2 = \alpha x_1 + (\beta + \lambda) x'_1, \qquad \ldots.$$

On en déduit

$$D^2 x_r = \lambda(\lambda x_{r-2} + x'_1) + \alpha x_1 + (\beta + \lambda) x'_1 = \lambda^2 x_{r-2} + \alpha x_1 + (\beta + 2\lambda) x'_1,$$
$$D^3 x_r = \lambda^3 x_{r-3}, \qquad \ldots, \qquad D^{r-1} x_r = \lambda^{r-1} x_1.$$

Prenant donc pour variables nouvelles

$$X_r = x_r, \qquad X_{r-1} = D X_r, \qquad X_1 = D^{r-1} X_r$$

au lieu de $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_1$, la substitution S′ prendra la forme

$$S' = \left| \begin{array}{c} DX_r = X_{r-1}, \qquad DX_{r-1} = X_{r-2}, \ldots, \qquad DX_1 = 0 \\ Dx'_2 = \alpha\lambda^{1-r}X_1 + (\beta + \lambda)x'_1, \qquad Dx'_1 = 0 \end{array} \right|,$$

semblable à celle qu'avait tout à l'heure la substitution S; mais le coefficient analogue à $b$ est ici $\beta + \lambda$ et l'indétermination de $\lambda$ permet de l'annuler.

Soit donc $\beta = 0$; si $\alpha$ n'est pas nul, on pourra le rendre égal à 1 en changeant $x'_2, x'_1, S_1$ en $\sqrt{\alpha}x'_2, \sqrt{\alpha}x'_1, \frac{S_1}{\sqrt{\alpha}}$.

Nous obtenons ainsi deux nouveaux groupes en supposant successivement $\alpha = 1$ et $\alpha = 0$ dans les formules précédentes.

Il y a donc en tout *cinq* groupes G de signature $[2, 2, 1, 1, 1, \ldots]$.

### 7° *Groupes de signature* $[1, 2, 2, 1]$.

**50.** Soient $x_4$; $x'_3, x''_3$; $x'_2, x''_2$; $x_1$ les variables.

On voit, comme au n° **24**, que G contient nécessairement, outre les $\sigma$, deux autres substitutions $S_1, S_2$ donnant respectivement à $x'_2, x''_2$ les accroissements suivants :

$$S_1, \qquad \Delta_1 x'_2 = x_1, \qquad \Delta_1 x''_2 = 0,$$
$$S_2, \qquad \Delta_2 x'_2 = 0, \qquad \Delta_2 x''_2 = x_1.$$

Quant à $x'_3, x''_3$, leurs accroissements seront de la forme

$$\Delta_1 x'_3 = \varphi_{11} + \alpha_{11}x_1, \qquad \Delta_1 x''_3 = \varphi_{12} + \alpha_{12}x_1,$$
$$\Delta_2 x'_3 = \varphi_{21} + \alpha_{21}x_1, \qquad \Delta_2 x''_3 = \varphi_{22} + \alpha_{22}x_1,$$

les $\varphi$ étant des fonctions linéaires de $x'_2, x''_2$, telles que

$$\varphi_{ik} = a'_{ik}x'_2 + a''_{ik}x''_2.$$

Les substitutions $S_1, S_2$ devront être échangeables; on en déduit, comme au n° **25**,

$$a'_{ik} = a'_{ki}, \qquad a''_{ik} = a''_{ki}.$$

Si donc on négligeait les termes en $x_1$, on pourrait écrire, comme au n° **25**,

$$\Delta_i x_3^l = \frac{\partial \psi_l}{\partial x_2^i} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \\ l = 1, 2 \end{pmatrix},$$

les $\psi$ étant des formes quadratiques en $x_2'$, $x_2''$.

Par un changement convenable des variables et des substitutions génératrices, on pourra transformer les deux fonctions $\psi$, de telle sorte que

$$\mu_1 \psi_1 + \mu_2 \psi_2$$

représente l'un des deux types réduits

$$\tfrac{1}{2}(\mu_1 x_2'^2 + \mu_2 x_2''^2)$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\mu_1 x_2'^2 + \mu_2 x_2' x_2'',$$

dont est susceptible un faisceau de deux formes binaires. Nous aurons donc à discuter successivement deux hypothèses distinctes :

**31**. *Première hypothèse* : $\psi_1 = \frac{1}{2} x_2'^2$, $\psi_2 = \frac{1}{2} x_2''^2$. — Rétablissant dans les expressions $\Delta_i x_3^l$ les termes en $x_1$ que nous avions négligés, il viendra

$$\begin{aligned} \Delta_1 x_3' &= x_2' + \alpha_{11} x_1, & \Delta_1 x_3'' &= \alpha_{12} x_1, \\ \Delta_2 x_3' &= \qquad \alpha_{21} x_1, & \Delta_2 x_3'' &= x_2'' + \alpha_{22} x_1. \end{aligned}$$

Mais on peut faire disparaître ces termes en $x_1$ en prenant pour variables, au lieu de $x_3'$, $x_3''$, les suivantes :

$$x_3' - \alpha_{11} x_2' - \alpha_{21} x_2'', \qquad x_3'' - \alpha_{12} x_2' - \alpha_{22} x_2''.$$

On aura donc simplement

$$\begin{aligned} \Delta_1 x_3' &= x_2', & \Delta_1 x_3'' &= 0, \\ \Delta_2 x_3' &= 0, & \Delta_2 x_3'' &= x_2''. \end{aligned}$$

Passons à l'examen de $\Delta_1 x_4$, $\Delta_2 x_4$. Ils sont de la forme

$$\Delta_1 x_4 = a_1 x'_3 + b_1 x''_3 + c_1 x'_2 + d_1 x''_2 + e_1 x_1,$$
$$\Delta_2 x_4 = b_2 x'_3 + a_2 x''_3 + d_2 x'_2 + c_2 x''_2 + e_2 x_1.$$

Mais on peut supposer $c_1$, $c_2$, $e_1$, $e_2$ nuls; car on les ferait disparaître en prenant pour variable

$$x_4 - c_1 x'_3 - c_2 x''_3 - e_1 x'_2 - e_2 x''_2$$

au lieu de $x_4$.

Soit donc

$$\Delta_1 x_4 = a_1 x'_3 + b_1 x''_3 + d_1 x''_2, \qquad \Delta_2 x_4 = b_2 x'_3 + a_2 x''_3 + d_2 x'_2.$$

On doit avoir l'identité

$$\Delta_1 \Delta_2 x_4 = \Delta_2 \Delta_1 x_4$$

ou

$$b_2 x'_2 + d_2 x_1 = b_1 x''_2 + d_1 x_1.$$

Donc $b_1 = b_2 = 0$, et $d_1 = d_2$; et $\Delta_1 x_4$, $\Delta_2 x_4$ se réduisent à

$$\Delta_1 x_4 = a_1 x'_3 + d x''_2, \qquad \Delta_2 x_4 = a_2 x''_3 + d x'_2.$$

Posons enfin, $\mu$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ étant des indéterminées,

$$x_1 = \mu X_1, \qquad x'_2 = \mu\lambda_1 X'_2, \qquad x''_2 = \mu\lambda_2 X''_2,$$
$$x'_3 = \mu\lambda_1^2 X'_3, \qquad x''_3 = \mu\lambda_2^2 X''_3,$$
$$S'_1 = \lambda_1 S_1, \qquad S'_2 = \lambda_2 S_2.$$

Les substitutions $S'_1$, $S'_2$ donneront aux nouvelles variables les accroissements suivants :

$$\Delta'_1 X'_2 = X_1, \quad \Delta'_1 X''_2 = 0, \quad \Delta'_1 X'_3 = X'_2, \quad \Delta'_3 X''_3 = 0, \quad \Delta'_1 x_4 = a_1 \mu\lambda_1^3 X'_3 + d\mu\lambda_1\lambda_2 X''_2,$$
$$\Delta'_2 X'_2 = 0, \quad \Delta'_2 X''_2 = X_1, \quad \Delta'_2 X'_3 = 0, \quad \Delta'_2 X''_3 = X''_2, \quad \Delta'_2 x_4 = a_2 \mu\lambda_2^3 X''_3 + d\mu\lambda_1\lambda_2 X''_2.$$

On voit que ces $\Delta'$ ont la même forme que les $\Delta$ précédents, sauf que $a_1$, $a_2$, $d$ y sont multipliés par les facteurs indéterminés $\mu\lambda_1^3$, $\mu\lambda_2^3$, $\mu\lambda_1\lambda_2$ (qui toutefois ne peuvent pas être nuls). Grâce à cette transfor-

mation, on peut admettre que chacun des coefficients $a_1$, $a_2$, $d$ se réduit à 0 ou à 1.

On peut d'ailleurs rejeter l'hypothèse $a_1 = 0$. En effet, si $a_1 = a_2 = 0$, $\Delta_1 x_4$ et $\Delta_2 x_4$ seraient de rang 2 au plus. Mais $x_4$ est de rang 4. Donc G devrait contenir, outre $S_1$, $S_2$ et les $\sigma$, une autre substitution $\Sigma$ qui accroisse $x_4$ d'une fonction de rang 3, telle que

$$Dx_4 = \alpha x'_3 + \beta x''_3 + \ldots,$$

$\alpha$ et $\beta$ ne pouvant être nuls à la fois. Mais une semblable substitution ne peut être échangeable à $S_1$ et à $S_2$. On aura, en effet,

$$\Delta_1 Dx_4 = \alpha x'_2 + \ldots, \qquad \Delta_2 Dx_4 = \beta x''_2 + \ldots,$$

et l'une au moins de ces expressions est de rang 2, puisque $\alpha$ ou $\beta$ est $\gtrless 0$. Mais elles devraient être égales respectivement à $D\Delta_1 x_4$, $D\Delta_2 x_4$, qui sont de rang $< 2$, puisque $\Delta_1 x_4$, $\Delta_2 x_4$ sont de rang $< 3$. Il y a donc contradiction.

Si, d'autre part, on avait $a_1 = 0$, mais $a_2 \gtrless 0$, il suffirait de permuter $x'_2$, $x'_3$, $S_1$ avec $x''_2$, $x''_3$, $S_2$ pour échanger $a_1$ et $a_2$ et ramener ainsi ce cas à celui où $a_1 \gtrless 0$, mais $a_2 = 0$.

Admettant donc que $a_1$ est égal à l'unité, il reste les quatre hypothèses suivantes :

$$a_2 = 1, \qquad d = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \qquad\qquad a_2 = 0, \qquad d = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Chacune d'elles nous fournit un groupe abélien. Mais ils ne seront généraux que s'il est impossible de les compléter par l'adjonction de nouvelles substitutions qui soient échangeables à $\sigma$, $S_1$, $S_2$ sans en être dérivées.

**32.** Cette impossibilité est manifeste, d'après le n° 9, si $a_2 = 1$, car les $\Delta_1 x_4$, $\Delta_2 x_4$, $\Delta_1 \Delta_2 x_4$, ... forment un système de fonctions distinctes en nombre égal à celui des variables $x'_3$, $x''_3$, $x'_2$, $x''_2$, $x_1$.

On arrivera au même résultat si $a_2 = 0$, $d = 0$. On a, dans ce cas,

$$S_1 = |\, \Delta_1 x_4 = x'_3, \quad \Delta_1 x'_3 = x'_2, \quad \Delta_1 x''_3 = 0, \quad \Delta_1 x'_2 = x_1, \quad \Delta_1 x''_2 = 0, \quad \Delta_1 x_1 = 0 \,|,$$

$$S_2 = |\, \Delta_2 x_4 = 0, \quad \Delta_2 x'_3 = 0, \quad \Delta_2 x''_3 = x''_2, \quad \Delta_2 x'_2 = 0, \quad \Delta_2 x''_2 = x_1, \quad \Delta_2 x_1 = 0 \,|.$$

Toute substitution $\Sigma$ échangeable à $S_1$ et à $S_2$, devant permuter exclusivement entre elles les fonctions que $S_2$ n'altère pas, devra donner à $x_4$ un accroissement de la forme

$$Dx_4 = ax'_3 + bx'_2 + cx_1.$$

En la combinant avec les dérivées de $S_1$, on en déduit une nouvelle substitution $\Sigma'$ qui laisse inaltéré $x_4$ et, par suite, $x'_3$, $x'_2$, $x_1$. D'ailleurs elle doit permuter exclusivement entre elles les fonctions que $S_1$ n'altère pas. L'accroissement qu'elle donne à $x''_3$ sera donc de la forme

$$D'x''_3 = a'x''_2 + b'x_1.$$

En la combinant avec les dérivées de $S_2$, on obtient une dernière substitution $S''$ qui n'altère plus aucune variable et se réduit à l'unité.

Donc $\Sigma$ n'est pas une substitution nouvelle, mais est dérivée de $S_1$, $S_2$.

**55.** Reste à examiner le dernier cas, où $a_2 = 0$, $d = 1$. Les substitutions $S_1$, $S_2$ auront les formes suivantes :

$$S_1 = |\ \Delta_1 x_4 = x'_3 + x''_2, \quad \Delta_1 x'_3 = x'_2, \quad \Delta_1 x'_2 = x_1, \quad \Delta_1 x''_3 = \Delta_1 x''_2 = \Delta_1 x_1 = 0\ |,$$
$$S_2 = |\ \Delta_2 x_4 = x'_2, \quad \Delta_2 x''_3 = x''_2, \quad \Delta_2 x''_2 = x_1, \quad \Delta_2 x'_3 = \Delta_2 x'_2 = \Delta_2 x_1 = 0\ |.$$

Cherchons à leur adjoindre une troisième substitution $\Sigma$ qui leur soit échangeable. Elle donnera à $x_4$ un accroissement $Dx_4$, dont on pourra faire disparaître les termes en $x'_3$, $x'_2$, $x_1$ en remplaçant, s'il est nécessaire, $\Sigma$ par une de ses combinaisons avec les dérivées de $S_1$, $S_2$. Soit donc

$$Dx_4 = ax''_3 + bx''_2.$$

Les conditions d'échangeabilité donnent

$$\Delta_1^2 Dx_4 = D\Delta_1^2 x_4, \qquad \Delta_2 Dx_4 = D\Delta_2 x_4.$$

Mais

$$\Delta_1^2 Dx_4 = 0, \qquad D\Delta_1^2 x_4 = Dx'_2,$$
$$\Delta_2 Dx_4 = ax''_2 + bx_1, \qquad D\Delta_2 x_4 = Dx'_2.$$

On en déduit $a = 0$, $b = 0$, d'où $Dx_1 = 0$ et, par suite (n° 8),

$$Dx_4 = 0, \qquad D(x'_3 + x''_2) = 0, \qquad Dx'_2 = 0, \qquad Dx_1 = 0.$$

Mais $Dx''_2$ est de la forme $cx_1$; $Dx'_3$ sera égal à $-cx_1$; enfin $Dx''_3$ sera de la forme

$$Dx''_3 = \alpha x'_2 + \beta x''_2 + \gamma x_1$$

et, comme parmi les dérivées de $S_2$ figure une substitution qui accroît $x''_3$ de $\gamma x_1$ sans altérer les autres variables, on peut supposer $\gamma = 0$.

Les conditions d'échangeabilité de la substitution $\Sigma$ ainsi définie seront satisfaites d'elles-mêmes, sauf celles-ci :

$$\Delta_1 Dx''_3 = D\Delta_1 x''_3, \qquad \Delta_2 Dx''_3 = D\Delta_2 x''_3$$

qui donneront respectivement $\alpha = 0$ et $\beta = c$.

Les substitutions cherchées $\Sigma$ seront donc des multiples de la seule substitution

$$S_3 = | Dx_4 = 0, \quad Dx'_3 = -x_1, \quad Dx''_3 = x''_2, \quad Dx'_2 = 0, \quad Dx''_2 = x_1, \quad Dx_1 = 0 |$$

qui devra être adjointe à $S_1$, $S_2$ pour obtenir le groupe général G relatif à ce cas.

**34.** *Deuxième hypothèse :* $\psi_1 = \frac{1}{2}x'^2_2$, $\psi_2 = x'_2 x''_2$. — On aura, dans ce cas,

$$\Delta_1 x'_3 = x'_2 + \alpha_{11} x_1, \qquad \Delta_1 x''_3 = x''_2 + \alpha_{12} x_1,$$
$$\Delta_2 x'_3 = \qquad \alpha_{21} x_1, \qquad \Delta_2 x''_3 = x'_2 + \alpha_{22} x_1.$$

Mais on peut supposer nuls les termes en $x_1$; car, s'ils existaient, on les ferait disparaître en prenant pour nouvelles variables

$$X'_3 = x'_3 - \alpha_{11} x'_2 - \alpha_{21} x''_2, \qquad X''_3 = x''_3 - \alpha_{12} x'_2 - \alpha_{22} x''_2.$$

Il est donc permis d'admettre qu'on ait plus simplement

$$\Delta_1 x_1 = 0, \qquad \Delta_1 x'_2 = x_1, \qquad \Delta_1 x''_2 = 0, \qquad \Delta_1 x'_3 = x'_2, \qquad \Delta_1 x''_3 = x''_2,$$
$$\Delta_2 x_1 = 0, \qquad \Delta_2 x'_2 = 0, \qquad \Delta_2 x''_2 = x_1, \qquad \Delta_2 x'_3 = 0, \qquad \Delta_2 x''_3 = x'_2;$$

quant à $\Delta_1 x_4$, $\Delta_2 x_4$, ils seront de la forme

$$\Delta_1 x_4 = a_1 x'_3 + b_1 x''_3 + c_1 x'_2 + d_1 x''_2 + e_1 x_1,$$
$$\Delta_2 x_4 = a_2 x'_3 + b_2 x''_3 + c_2 x'_2 + d_2 x''_2 + e_2 x_1.$$

Mais on pourra faire disparaître de ces expressions les termes en $x_1$ et en $x_2$ en prenant, s'il y a lieu, pour nouvelle variable

$$X_4 = x_4 - c_1 x'_3 - c_2 x''_3 - e_1 x'_2 - e_2 x''_2.$$

Soit donc $c_1 = c_2 = e_1 = e_2 = 0$. On aura, en outre, $S_1$ et $S_2$ devant être échangeables,

$$\Delta_1 \Delta_2 x_4 = \Delta_2 \Delta_1 x_4$$

ou

$$a_2 x'_2 + b_2 x''_2 = b_1 x'_2 + d_1 x_1.$$

Donc $b_1 = a_2$, $b_2 = 0$, $d_1 = 0$, de sorte que $\Delta_1 x_4$, $\Delta_2 x_4$ se réduiront aux formes suivantes :

$$\Delta_1 x_4 = a x'_3 + b x''_3, \qquad \Delta_2 x_4 = b x'_3 + d x''_2.$$

**53.** D'ailleurs $a$ et $b$ ne peuvent être nuls à la fois. En effet, on aurait dans cette hypothèse $\Delta_1 x_4 = 0$. Soit alors $\Sigma$ une substitution quelconque de G,

$$D x_4 = \alpha x'_3 + \beta x''_3 + \ldots,$$

l'accroissement qu'elle donne à $x_4$ ; on aura

$$D \Delta_1 x_4 = 0, \qquad \Delta_1 D x_4 = \alpha x'_2 + \beta x''_2 + \ldots,$$

d'où $\alpha = \beta = 0$. Donc $x_4$ ne serait pas une variable de rang 4.

Mais, d'autre part, on peut admettre que l'un des deux coefficients $a$, $b$ est nul. Supposons, en effet, qu'aucun des deux ne le soit. Prenons pour variables, au lieu de $x''_2$, $x''_3$, celles-ci

$$X'_2 = x''_2 - \lambda x'_2, \qquad X''_3 = x''_3 - 2\lambda x'_3,$$

il viendra

$$\Delta_1 X''_2 = - \lambda x_1, \qquad \Delta_1 X''_3 = x''_2 - 2\lambda x'_2 = X'_2 - \lambda x'_2,$$
$$\Delta_1 x_4 = (a + 2b\lambda) x'_3 + b X''_3,$$
$$\Delta_2 X''_2 = x_1, \qquad \Delta_2 X'_3 = x'_2, \qquad \Delta_2 x_4 = b x'_3 + d(X''_2 + \lambda x'_2).$$

Prenons pour substitution génératrice, au lieu de $S_1$, la suivante :

$$S'_1 = (S_1 + \lambda S_2).$$

Elle donnera aux variables les accroissements suivants :

$$\Delta'_1 x_1 = 0, \qquad \Delta'_1 x'_2 = x_1, \qquad \Delta'_1 x'_3 = x'_2,$$
$$\Delta'_1 x_4 = (a + 3b\lambda) x'_3 + b X''_3 + \lambda d (X''_2 + \lambda x'_2),$$
$$\Delta'_1 X''_2 = 0, \qquad \Delta'_1 X''_3 = X''_2.$$

Posons encore

$$X_4 = x_4 - \lambda^2 d x'_3 - \lambda d X''_3,$$

on aura

$$\Delta'_1 X_4 = (a + 3b\lambda) x'_3 + b X''_3, \qquad \Delta_2 X_4 = b x'_3 + d X''_2.$$

Les substitutions $S'_1$, $S_2$ auront donc, par rapport aux nouvelles variables $x_1$, $x'_2$, $x'_3$, $X''_2$, $X''_3$, $X_4$, la même forme qu'avaient $S_1$, $S_2$ par rapport à $x_1$, $x'_2$, $x'_3$, $x''_2$, $x''_3$, $x_4$, sauf que le coefficient $a$ est remplacé par $a + 3b\lambda$. On peut disposer de l'indétermination de $\lambda$ pour l'annuler.

**56.** Il est d'ailleurs aisé de rendre égaux à l'unité ceux des coefficients $a$, $b$, $d$ qui ne sont pas nuls. Posons, en effet,

$$x_1 = \mu X_1 \qquad x'_2 = \mu\lambda X'_2, \qquad x'_3 = \mu\lambda^2 X'_3, \qquad x_4 = X_4,$$
$$x''_2 = \mu\lambda X''_2, \qquad x''_3 = \mu\lambda^2 X''_3,$$
$$S'_1 = \lambda S_1, \qquad S'_2 = \lambda S_2.$$

Les nouvelles substitutions génératrices $S'_1$, $S'_2$ auront, par rapport aux nouvelles variables $X$, la même forme que $S_1$, $S_2$ par rapport aux $x$, sauf que $d$ sera multiplié par $\mu\lambda^2$ et celui des coefficients $a$, $b$ qui n'est pas nul par $\mu\lambda^3$, facteurs non nuls, mais d'ailleurs arbitraires.

Nous aurons donc finalement *quatre* combinaisons possibles :

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad \begin{cases} d = 0, \\ d = 1; \end{cases}$$

$$a = 0, \qquad b = 1, \qquad \begin{cases} d = 0, \\ d = 1, \end{cases}$$

auxquelles correspondent autant de groupes abéliens, qu'on devra toutefois compléter par l'adjonction de nouvelles substitutions, s'il en existe qui soient échangeables à $S_1$ et $S_2$ sans en être dérivées.

**57.** 1° Les deux groupes pour lesquels $b=1$ sont déjà complets (n° **9**); car les fonctions $x_4$, $\Delta_1 x_4$, $\Delta_2 x_4$, ..., $\Delta_1^i \Delta_2^k x_4$ reproduisent par leur combinaison une fonction quelconque des variables.

2° Passons au cas où $a=1$, $b=d=0$.

Toute substitution $\Sigma$ échangeable à $S_1$ et à $S_2$ doit permuter exclusivement entre elles les fonctions que $S_2$ n'altère pas. Elle donnera donc à $x_4$ un accroissement de la forme

$$Dx_4 = ax'_3 + bx'_2 + cx_1.$$

Mais tout accroissement de cette forme peut être donné à $x_4$ par une substitution dérivée de $S_1$, nous pouvons donc supposer

$$Dx_4 = 0$$

et, par suite (n° **6**),

$$Dx'_3 = Dx'_2 = Dx_1 = 0.$$

Quant à $x''_3$, $x''_2$, leurs accroissements seront de la forme

$$Dx''_3 = \alpha x'_2 + \beta x''_2 + \gamma x_1, \qquad Dx''_2 = \delta x_1.$$

Les conditions d'échangeabilité de $\Sigma$ avec $S_1$ donneront $\alpha=\delta$; celles d'échangeabilité avec $S_2$ donnent $\beta=0$. Les substitutions $\Sigma$ ont donc pour forme générale

$$|\ Dx''_3 = \alpha x'_2 + \gamma x_1,\ \ Dx''_2 = \alpha x_1\ |.$$

Ce sont les dérivées de la substitution unique

$$S_3 = |\ Dx''_3 = x'_2,\ \ Dx''_2 = x_1\ |$$

qu'il faudra adjoindre à $S_1$, $S_2$ pour obtenir le groupe G.

3° Soit enfin $a=1$, $b=0$, $d=1$; d'où $\Delta_2 x_4 = x''_2$. Les dérivées de $S_1$, $S_2$ permettent d'accroître $x_4$ d'une autre variable quelconque, sauf $x''_3$. On peut donc admettre que les nouvelles substitutions $\Sigma$ à

adjoindre à $S_1$, $S_2$ lui donnent un accroissement

$$Dx_4 = \alpha x''_3.$$

On aura, d'ailleurs,

$$Dx'_3 = D\Delta_1 x_4 = \Delta_1 Dx_4 = \alpha \Delta_1 x''_3 = \alpha x''_2,$$
$$Dx'_2 = D\Delta_1^2 x_4 = \Delta_1^2 Dx_4 = \Delta_1^2 x''_3 \quad = 0;$$

$Dx''_3$ sera de la forme

$$Dx''_3 = \beta x'_2 + \gamma x''_2 + \delta x_1$$

et l'on en déduit

$$Dx''_2 = D\Delta_1 x''_3 = \Delta_1 Dx''_3 = \beta x_1.$$

On a, en outre,

$$D\Delta_2 x_4 = Dx''_2 = \beta x_1, \qquad \Delta_2 Dx_4 = \alpha x'_2, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \beta = 0,$$
$$D\Delta_2 x''_3 = Dx'_2 = 0, \qquad \Delta_2 Dx''_3 = \gamma x_1 \qquad \text{d'où} \qquad \gamma = 0.$$

Les substitutions $\Sigma$ laisseront donc toutes les variables inaltérées, sauf $x''_3$, qu'elles accroîtront de $\delta x_1$. Elles se réduisent donc aux multiples de la seule substitution

$$S_3 = | \; Dx''_3 = x_1 \; |,$$

dont l'adjonction à $S_1$, $S_2$ donnera le groupe G.

En résumé, notre analyse nous a fourni *huit* groupes de signature [1, 2, 2, 1].

8° *Groupes de signature* [1, 2, 2, 1, 1, ...].

**58.** Ces groupes contiennent, outre les substitutions $\sigma$, une autre substitution $S_1$ pour laquelle on a

$$\Delta_1 x_r = x_{r-1}, \qquad \Delta_1 x_{r-1} = x_{r-2}, \qquad \ldots,$$
$$\Delta_1 x_3 = x_2, \qquad \Delta_1 x_2 = x_1, \qquad \Delta_1 x_1 = 0,$$
$$\Delta_1 x'_3 = a x'_2 + b x_2 + c x_1, \qquad \Delta_1 x'_2 = d x_1.$$

D'ailleurs, en prenant pour nouvelles variables

$$X'_3 = x'_3 - b x_3 - c x_2, \qquad X'_2 = x'_2 - d x_2,$$

on fera disparaître $b$, $c$, $d$; puis, si $a$ n'est pas nul, on le réduira à l'unité en prenant $a X'_2$ pour variable. On aura donc finalement, soit

$$\Delta_1 x'_3 = 0, \qquad \Delta_1 x'_2 = 0,$$

soit

$$\Delta_1 x'_3 = x'_2, \qquad \Delta_1 x'_2 = 0.$$

Discutons successivement ces deux cas.

**39.** *Première hypothèse :* $\Delta_1 x'_3 = \Delta_1 x'_2 = 0$. — Le groupe cherché résulte de la combinaison de $S_1$ avec d'autres substitutions $\Sigma$ pour lesquelles on a

$$D x_r = a x'_3 + b x'_2$$

et, par suite,

$$D x_{r-1} = D\Delta_1 x_r = \Delta_1 D x_r = 0, \qquad D x_{r-2} = 0, \qquad \ldots, \qquad D x_1 = 0.$$

Enfin $D x'_3$, $D x'_2$ seront de la forme

$$D x'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2 + \gamma x_1, \qquad D x'_2 = \delta x_1.$$

La condition

$$\Delta_1 D x'_3 = D\Delta_1 x'_3$$

montre que $\beta$ est nul. D'autre part, $x'_3$ étant une variable de rang 3, G contient au moins une substitution $S_2$ de l'espèce $\Sigma$ où $\alpha$ ne soit pas nul.

Soit, pour cette substitution,

$$\Delta_2 x'_3 = \alpha_2 x'_2 + \gamma_2 x_1, \qquad \Delta_2 x'_2 = \delta_2 x_1.$$

On peut admettre que $\delta_2$ n'est pas nul, car, s'il l'était, $x''_2$ étant de rang 2, G devrait contenir une nouvelle substitution $S_3$ d'espèce $\Sigma$ et

pour laquelle on aurait

$$\Delta_3 x'_3 = \alpha_3 x'_2 + \gamma_3 x_1, \qquad \Delta_3 x'_2 = \delta_3 x_1 \qquad (\delta_3 \gtrless 0).$$

Il contiendrait donc la substitution $(S_2 + \lambda S_3) = S'$, pour laquelle on a

$$\Delta' x'_3 = (\alpha_2 + \lambda\alpha_3) x'_2 + (\gamma_2 + \lambda\gamma_3) x_1, \qquad \Delta' x'_2 = (\delta_2 + \lambda\,\delta_3) x_1.$$

Or on peut choisir $\lambda$ de telle sorte que ni $\alpha_2 + \lambda\alpha_3$, ni $\delta_2 + \lambda\,\delta_3$ ne soit nul.

Supposons donc $\alpha_2 \gtrless 0$, $\delta_2 \gtrless 0$. Posant

$$\alpha_2 x'_2 + \gamma_2 x_1 = \alpha_2 \delta_2 X'_2, \qquad x'_3 = \alpha_2 \delta_2 X'_3,$$

on aura

$$\Delta_2 X'_3 = X'_2, \qquad \Delta_2 X'_2 = x_1.$$

Par ce changement de variables, $\gamma_2$ aura été réduit à zéro, $\alpha_2$ et $\delta_2$ à l'unité; $S_2$ sera donc de la forme

$$S_2 = \left| \begin{array}{c} \Delta_2 x_r = a_2 x'_3 + b_2 x'_2, \qquad \Delta_2 x_{r-1} = \ldots = \Delta_2 x_2 = \Delta_2 x_1 = 0 \\ \Delta_2 x'_3 = x'_2, \qquad \Delta_2 x'_2 = x_1 \end{array} \right|.$$

On fera, d'ailleurs, disparaître $b_2$ en prenant pour variable $x_r - b_2 x'_3$. Enfin, si $a_2$ n'est pas nul, on peut le rendre égal à l'unité en prenant pour variables $\mu x'_2$, $\mu^2 x'_3$ et pour substitution génératrice $\frac{1}{\mu} S_2$, $\mu$ désignant la racine cubique de $a_2$.

On aura donc deux cas possibles, $a_2 = 0$ ou $a_2 = 1$. Dans chacun de ces deux cas, la combinaison des substitutions $\sigma$, $S_1$, $S_2$ donnera un groupe abélien.

Chacun d'eux sera général. Voyons, en effet, parmi les substitutions de l'espèce $\Sigma$ celles qu'on pourrait lui adjoindre pour le compléter :

1° Si $a_2 = 1$, ces substitutions devraient laisser invariables $x_r$, $x_{r-1}$, ..., $x_1$, $x'_3$, $x'_2$; elles se réduiraient donc à l'unité.

2° Si $a_2 = 0$, ces substitutions, simplifiées au besoin par leur combinaison avec les dérivées de $S_2$, laisseront invariables $x'_3$, $x'_2$. Elles

ne pourraient donc plus altérer que la seule variable $x_r$ qu'elles accroîtraient d'une quantité

$$Dx_r = ax'_3 + bx'_2.$$

Mais on aurait

$$D\Delta_2 x_r = 0, \qquad \Delta_2 Dx_r = ax'_2 + bx_1.$$

Donc $a = b = 0$ et les substitutions cherchées se réduisent à l'unité.

**40.** *Deuxième hypothèse :* $\Delta_1 x'_3 = x'_2$, $\Delta_1 x'_2 = 0$. — On aura

$$S_1 = | \Delta_1 x_r = x_{r-1}, \quad \ldots, \quad \Delta_1 x_2 = x_1, \quad \Delta_1 x'_3 = x'_2, \quad \Delta_1 x'_2 = 0 |$$

et pour les substitutions $\Sigma$

$$\begin{aligned} Dx_r &= ax'_3 + bx'_2, \\ Dx_{r-1} &= D\Delta_1 x_r = \Delta_1 Dx_r = ax'_2, \\ Dx_{r-2} &= \ldots = Dx_1 = 0, \\ Dx'_3 &= \alpha x'_2 + \beta x_2 + \gamma x_1, \\ Dx'_2 &= D\Delta_1 x'_3 = \Delta_1 Dx'_3 = \beta x_1. \end{aligned}$$

Divers cas seront à distinguer ici :

1° Supposons d'abord que G contienne une substitution $S_2$ de l'espèce $\Sigma$ et dans laquelle $a$ ne soit pas nul. Les dérivées des substitutions $S_1$, $S_2$ permettant d'accroître $x_r$ d'autant de fonctions linéairement distinctes qu'il y a de variables, G ne contiendra pas d'autres substitutions (n° 9).

Il reste à réduire ce groupe à une forme canonique en changeant de variables indépendantes et de substitutions génératrices.

On peut tout d'abord prendre pour nouvelles variables

$$X'_3 = ax'_3 + bx'_2, \qquad X'_2 = ax'_2$$

au lieu de $x'_3$, $x'_2$; les substitutions $S_1$, $S_2$ conserveront leur forme; mais $a$ sera réduit à l'unité et $b$ à zéro. Soit donc

$$S_2 = | \Delta_2 x_r = x'_3, \Delta_2 x_{r-1} = x'_2, \ldots, \Delta_2 x'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2 + \gamma x_1, \Delta_2 x'_2 = \beta x_1 |.$$

Le coefficient $\beta$ sera $\gtrless 0$, car, s'il était nul, $x'_2$ n'étant altérée par aucune substitution de G, serait de rang 1 et non de rang 2.

Si $\alpha$ est également $\gtrless 0$, nous poserons

$$X'_3 = x'_3 + \lambda x_2, \qquad X'_2 = x'_2 + \lambda x_1.$$

Ce changement de variable n'altère pas l'expression de $S_1$ ; mais l'on aura pour $S_2$

$$\Delta_2 x_r = X'_3 - \lambda x_2, \qquad \Delta_2 x_{r-1} = X'_2 - \lambda x_1,$$
$$\Delta_2 X'_3 = \alpha X'_2 + \beta x_2 + (\gamma - \alpha\lambda) x_1, \qquad \Delta_2 x'_2 = \beta x_1.$$

On peut déterminer $\lambda$ de telle sorte que $\gamma - \alpha\lambda$ soit nul.

Cela fait, il existe parmi les dérivées de $S_1$ une substitution $s$ qui donne aux variables $x_r, x_{r-1}, x_{r-2}, \ldots, X'_3, \ldots$ les accroissements respectifs

$$\delta x_r = \lambda \Delta_1^{r-2} x_r = \lambda x_2, \quad \delta x_{r-1} = \lambda \Delta_1^{r-2} x_{r-1} = \lambda x_1, \quad \delta x_{r-2} = 0, \quad \ldots,$$
$$\delta X'_3 = \lambda \Delta_1^{r-2} X'_3 = 0, \qquad \ldots.$$

On pourra prendre pour substitution génératrice de G, au lieu de $S_2$, la substitution $(S_2 + s)$ qui a la même forme que $S_2$, sauf que le coefficient $\gamma$ a été annulé.

Il est donc permis de supposer que dans l'expression de $S_2$ l'un au moins des deux coefficients $\alpha$, $\gamma$ est nul.

Posons maintenant

$$\ldots, \qquad X_m = \lambda^m x_m, \qquad \ldots, \qquad X_3 = u\lambda^r x'_3, \qquad X_2 = u\lambda^{r-1} x'_2,$$

et prenons $S'_1 = \lambda^{-1} S_1$, $S'_2 = u S_2$ pour substitutions génératrices au lieu de $S_1$, $S_2$. Les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ se reproduiront multipliés respectivement par $u\lambda$, $u^2\lambda^{r-2}$, $u^2\lambda^{r-1}$. On pourra profiter de l'indétermination de $\lambda$, $u$ pour réduire à l'unité le coefficient $\beta$, et celui des coefficients $\alpha$, $\gamma$ qui pourrait être différent de zéro.

On obtient ainsi *trois* types réduits correspondant aux trois hypothèses

$$\beta = 1 \begin{cases} \alpha = 1, & \gamma = 0, \\ \alpha = 0, & \gamma = 1, \\ \alpha = 0, & \gamma = 0. \end{cases}$$

**41.** 2° Supposons maintenant que, parmi les substitutions de l'espèce $\Sigma$ que G peut contenir, il n'en existe aucune où $a$ soit différent de zéro; G contiendra nécessairement (n° **10**) la substitution $\sigma_1$ qui accroît $x'_3$ de $x_1$ sans altérer les autres variables; et il sera dérivé de la combinaison des substitutions $\sigma_1$, $S_1$ avec d'autres substitutions $\Sigma'$ pour lesquelles

$$D'x_r = bx'_2, \quad D'x_{r-1} = bx_1, \quad D'x'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2, \quad D'x'_2 = \beta x_1,$$

les autres variables restant inaltérées.

Supposons que parmi ces substitutions $\Sigma'$ (contenues dans G) il en existe une $S_2$ où $b$ ne soit pas nul. On peut le supposer égal à l'unité; et l'on aura

$$S_2 = |\Delta_2 x_r = x'_2, \Delta_2 x_{r-1} = x'_1, \Delta_2 x'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2, \Delta_2 x'_2 = \beta x_1|.$$

Le groupe G sera dérivé des seules substitutions $\sigma'$, $S_1$, $S_2$. Car, s'il contenait une autre substitution $S_3$ non dérivée de celle-là, on pourrait admettre qu'elle laisse invariable $x_r$ et, par suite, $x_{r-1}, \ldots, x_1, x'_2$. Quant à $x'_3$ son accroissement serait de la forme

$$\Delta_3 x'_3 = \alpha' x'_2 + \beta' x_2.$$

Mais on a

$$\Delta_1 \Delta_3 x'_3 = \beta' x_1, \qquad \Delta_3 \Delta_1 x'_3 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \beta' = 0,$$
$$\Delta_2 \Delta_3 x'_3 = \alpha' \beta_1 x_1, \qquad \Delta_3 \Delta_2 x'_3 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha'\beta = 0.$$

D'ailleurs $\beta$ ne peut être nul (car $x'_2$ ne serait pas de rang 2). Donc $\alpha' = \beta' = 0$, et $S_3$ se réduit à l'unité.

Posons enfin

$$\ldots, \quad X_m = \lambda^m x_m, \quad \ldots, \quad X'_3 = \mu\lambda^r x'_3, \quad X'_2 = \mu\lambda^{r-1} x_2,$$
$$\sigma'_1 = \frac{1}{\mu\lambda^{r-1}}\sigma_1, \qquad S'_1 = \lambda^{-1} S_1, \qquad S'_2 = u S_2.$$

Les coefficients $b$, $\alpha$, $\beta$ seront par ce changement multipliés respectivement par

$$\frac{u\lambda}{\mu}, \quad u\lambda, \quad u\mu\lambda^{r-2},$$

ce qui permettra de réduire $b$ et $\beta$ à l'unité, et $\alpha$ à l'une des deux valeurs 0 ou 1 : on obtient ainsi *deux* types réduits.

**42.** 3° Supposons enfin que toutes celles des substitutions $\Sigma$ que G contient laissent invariable $x_r$ (et, par suite, $x_{r-1}, \ldots, x_1$). Le groupe G résultera de la combinaison des substitutions $\sigma_1$, $S_1$ avec de nouvelles substitutions de la forme

$$\Sigma = | Dx'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2, \; Dx'_2 = \beta x_1 |.$$

Or deux substitutions de cette forme ne sont échangeables que si leurs coefficients sont proportionnels. On ne pourra donc adjoindre à $\sigma_1$, $S_1$ pour former le groupe G qu'une seule substitution nouvelle

$$S_2 = | \Delta_2 x'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2, \; \Delta_2 x'_2 = \beta x_1 |$$

et ses multiples.

Le coefficient $\beta$ ne peut être nul (car $x'_2$ ne serait pas de rang 2); mais on peut le ramener à l'unité, et le coefficient $\alpha$ à l'unité ou à zéro; car on peut comme tout à l'heure les multiplier par les deux indéterminées $u\lambda$, $u\mu\lambda^{r-2}$.

On obtient ainsi *deux* types réduits nouveaux, correspondant aux deux valeurs de $\alpha$.

*Conclusion.* — Il existe *neuf* groupes réduits de signature [1, 2, 2, 1, 1, ...], quel que soit d'ailleurs le nombre des unités qui terminent cette signature (s'il y en a plus d'une).

### 9° *Groupes de signature* [2, 2, $n$].

**43.** Soient $x'_1, x''_1; x'_2, x''_2; x^i_3$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ les variables.

Les groupes cherchés s'obtiennent par la combinaison des $\sigma$ avec d'autres substitutions S, dans lesquelles chacune des variables $x^i_3$ de rang 3 reçoit un accroissement de la forme

$$\Delta x^i_3 = a_i x'_2 + b_i x''_2.$$

*Première hypothèse.* — Le groupe contient deux substitutions $S_1$,

$S_2$, telles que les deux fonctions

$$\Delta_1 x'_3, \quad \Delta_2 x'_3$$

soient distinctes.

Prenons-les pour variables indépendantes; on aura

$$\Delta_1 x'_3 = x'_2, \qquad \Delta_2 x'_3 = x''_2$$

et le groupe sera dérivé de $\sigma$, $S_1$, $S_2$ et d'autres substitutions $\Sigma$ qui n'altèrent plus $x'_3$, $x'_2$, $x''_2$, $x'_1$, $x''_1$. Ces substitutions $\Sigma$ donneront à l'une quelconque des variables restantes un accroissement

$$\Delta x^i_3 = a_i x'_2 + b_i x''_2.$$

On aura d'ailleurs

$$\Delta_1 (a_i x'_2 + b_i x''_2) = \Delta_1 \Delta x^i_3 = \Delta \Delta_1 x^i_3 = 0,$$

car $\Delta_1 x^i_3$ ne dépend que de $x'_2$, $x''_2$ que les $\Sigma$ n'altèrent pas. On trouvera de même

$$\Delta_2 (a_i x'_2 + b_i x''_2) = 0.$$

La fonction $a_i x'_2 + b_i x''_2$ ne serait donc altérée par aucune substitution de G, quoiqu'elle soit de rang 2. Cette contradiction ne peut être levée que si $a_i = b_i = 0$.

Les substitutions $\Sigma$ n'altéreront donc aucune des variables et se réduiront à l'unité. Le groupe G sera donc dérivé des seules substitutions $\sigma$, $S_1$, $S_2$.

L'analyse du n° **18** nous a montré que la substitution

$$S = (\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2),$$

qui donne à $x'_3$ l'accroissement

$$D x'_3 = \lambda_1 x'_2 + \lambda_2 x''_2,$$

donne à $\mu_1 x'_2 + \mu_2 x''_2$ un accroissement de la forme

$$D(\mu_1 x'_2 + \mu_2 x''_2) = \mu_1 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} + \mu_2 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_2},$$

où

$$\psi = x'_1 \psi_1 + x''_1 \psi_2,$$

$\psi_1$ et $\psi_2$ étant quadratiques en $\lambda_1$, $\lambda_2$. En choisissant convenablement les variables et les substitutions génératrices, on pourra faire en sorte que $\psi$ soit réduit à l'un des trois types suivants :

$$\tfrac{1}{2}(x'_1\lambda_1^2 + x''_1\lambda_2^2), \quad \tfrac{1}{2}x'_1\lambda_1^2 + x''_1\lambda_1\lambda_2, \quad \tfrac{1}{2}x'_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2),$$

d'où autant de cas distincts à étudier séparément.

**44.** *Premier cas :* $\psi = \frac{1}{2}(x'_1\lambda_1^2 + x''_1\lambda_2^2)$. — Les substitutions $S_1$, $S_2$ donneront à $x'_3$, $x'_2$, $x''_2$ les accroissements

$$\Delta_1 x'_3 = x'_2, \qquad \Delta_1 x'_2 = x'_1, \qquad \Delta_1 x''_2 = 0,$$
$$\Delta_2 x'_3 = x''_2, \qquad \Delta_2 x'_2 = 0, \qquad \Delta_2 x''_2 = x''_1,$$

et à une autre variable de rang 3 (s'il en existe plusieurs), telle que $x''_3$, des accroissements de la forme

$$\Delta_1 x''_3 = a x'_2 + b x''_2, \qquad \Delta_2 x''_3 = c x'_2 + d x''_2.$$

On a d'ailleurs

$$\Delta_1\Delta_2 x''_3 = c x'_1, \qquad \Delta_2\Delta_1 x''_3 = b x''_1,$$

donc $b = 0$, $c = 0$. On peut enfin rendre $a$ égal à zéro en prenant pour variable $x''_3 - a x'_3$ au lieu de $x''_3$. Cela fait, $d$ ne pourra être nul, car, $x''_3$ étant de rang 3, G doit contenir au moins une substitution qui lui donne un accroissement de rang 2. On rendra $d$ égal à 1, en prenant pour variable $\frac{1}{d}x''_3$. Soit donc

$$\Delta_1 x''_3 = 0, \qquad \Delta_2 x''_3 = x''_2.$$

Il ne peut exister une troisième variable $x'''_3$ de rang 3, car $S_1$, $S_2$ lui donneraient des accroissements de la forme

$$\Delta_1 x'''_3 = a x''_1, \qquad \Delta_2 x'''_3 = d x''_2;$$

elles n'altéreraient donc pas la fonction

$$x'''_3 - a x'_3 - (d - a) x''_3$$

qu'on pourrait prendre pour variable indépendante au lieu de $x'''_3$ et qui serait de rang $< 3$.

La discussion de ce premier cas nous fournit donc un groupe de signature [2, 2, 1] et un autre de signature [2, 2, 2]; aucun de signature [2, 2, $n$], si $n > 2$.

45. *Deuxième cas :* $\psi = \frac{1}{2} x'_1 \lambda_1^2 + x''_1 \lambda_1 \lambda_2$. — On a ici

$$\Delta_1 x'_3 = x'_2, \qquad \Delta_1 x'_2 = x'_1, \qquad \Delta_1 x''_2 = x''_1,$$
$$\Delta_2 x'_3 = x''_2, \qquad \Delta_2 x'_2 = x''_1, \qquad \Delta_2 x''_2 = 0.$$

S'il y a une autre variable $x''_3$ de rang 3, elle subira des accroissements

$$\Delta_1 x''_3 = a x'_2 + b x''_2, \qquad \Delta_2 x''_3 = c x'_2 + d x''_2.$$

Mais

$$\Delta_1 \Delta_2 x''_3 = c x'_1 + d x''_1, \qquad \Delta_2 \Delta_1 x''_3 = a x''_1,$$

d'où $c = 0$, $a = d$. Par les mêmes changements de variables que dans le cas précédent, on rendra $a = d$ nul et $b$ égal à 1.

On voit de même qu'il ne peut exister de troisième variable de rang 3. On obtient donc, comme dans le cas précédent, deux groupes, de signature [2, 2, 1] et [2, 2, 2] respectivement.

46. *Troisième cas :* $\psi = \frac{1}{2} x'_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$. — On aura

$$\Delta_1 x'_3 = x'_2, \qquad \Delta_1 x'_2 = x'_1, \qquad \Delta_1 x''_2 = 0,$$
$$\Delta_2 x'_3 = x''_2, \qquad \Delta_2 x'_2 = 0, \qquad \Delta_2 x''_2 = x'_1.$$

S'il n'y a qu'une variable de rang 3, la construction du groupe sera terminée. S'il en existe une seconde, $x''_3$, elle recevra des accroissements

$$\Delta_1 x''_3 = a x'_2 + b x''_2, \qquad \Delta_2 x''_3 = c x'_2 + d x''_2,$$

mais

$$\Delta_1 \Delta_2 x''_3 = c x'_1, \qquad \Delta_2 \Delta_1 x''_3 = b x'_1,$$

donc $b = c$.

D'ailleurs, en prenant pour variable $x''_3 - a x'_3$, on annulera $a$; il restera donc

$$\Delta_1 x''_3 = b x''_2, \qquad \Delta_2 x''_3 = b x'_2 + d x''_2.$$

S'il existe une troisième variable de rang 3, telle que $x_3'''$, on aura de même

$$\Delta_1 x_3''' = \beta x_2'', \qquad \Delta_2 x_3''' = \beta x_2' + \delta x_2''.$$

En remplaçant $x_3''$, $x_3'''$ par des fonctions linéaires convenables, il viendra plus simplement

$$\Delta_1 x_3'' = x_2'', \qquad \Delta_1 x_3''' = 0.$$
$$\Delta_2 x_3'' = x_2', \qquad \Delta_2 x_3''' = x_2''.$$

On a ainsi formé un groupe G de signature [2, 2, 3].

On ne peut ajouter une quatrième variable $x_3^{\text{iv}}$, car en la combinant avec les précédentes on la remplacerait par une nouvelle variable pour laquelle $\Delta_1$ et $\Delta_2$ seraient nuls et qui, par suite, serait de rang $< 3$.

Revenons au cas où il n'y a que deux variables $x_3'$, $x_3''$ de rang 3. Nous avons, dans les expressions de $\Delta_1 x_3''$, $\Delta_2 x_3''$, deux paramètres $b$, $d$. Ils ne peuvent être nuls à la fois, car $x_3''$ ne serait pas de rang 3. Si l'un d'eux est nul, on pourra rendre l'autre égal à l'unité, en remplaçant $x_3''$ par un de ses multiples. Si tous deux sont différents de zéro, on peut rendre encore l'un d'eux égal à l'unité, mais on ne pourra modifier leur rapport, qui subsiste comme paramètre invariant.

La discussion de ce cas donne donc *trois* groupes, de signature

[2, 2, 2] :

| | | |
|---|---|---|
| Dans le premier........................ | $b = 0$, | $d = 1$, |
| Dans le second........................ | $b = 1$, | $d = 0$, |
| Dans le troisième............... ...... | $b = 1$, | $d = e$, |

$e$ étant un invariant non nul.

47. *Deuxième hypothèse.* — Supposons, au contraire, que toutes les substitutions S accroissent $x_3$ des multiples d'une même fonction.

Il existe (n° 11) une substitution $S_1$, telle que $\Delta_1 x_3'$, $\Delta_1^2 x_3'$ soient de rang 2, 1 respectivement. En les prenant pour variables indépendantes, on pourra écrire

$$\Delta_1 x_3' = x_2', \qquad \Delta_1 x_2' = x_1', \qquad \Delta_1 x_1' = 0.$$

Les accroissements des autres variables seront de la forme

$$\Delta_1 x^i_3 = a_i x'_2 + b_i x''_2 \qquad (i = 2, \ldots, n),$$
$$\Delta_1 x''_2 = \alpha x'_1 + \beta x''_1, \qquad \Delta_1 x''_1 = 0.$$

Mais on peut supposer les coefficients $a_i$, $\alpha$ nuls, car on les ferait disparaître au besoin par le changement de variables

$$X''_2 = x''_2 - \alpha x'_2, \qquad X^i_3 = x^i_3 - (a_i + \alpha b_i) x'_3.$$

Soit donc plus simplement

$$\Delta_1 x^i_3 = b_i x''_2, \qquad \Delta_1 x''_2 = \beta x''_1.$$

Si $\beta$ n'est pas nul, on le réduira ensuite à l'unité en prenant pour nouvelle variable $\frac{1}{\beta} x''_2$; enfin, si l'un des coefficients $b_i$, par exemple $b_2$, est différent de zéro, on le rendra égal à 1 et l'on annulera $b_3, \ldots$ par un dernier changement de variables

$$X''_3 = \frac{1}{b_2} x''_3, \qquad X^i_3 = x^i_3 - \frac{b_i}{b_2} x''_3;$$

$S_1$ sera ainsi ramené à la forme

$$S_1 = \left| \begin{array}{lll} \Delta_1 x'_3 = x'_2, & \Delta_1 x'_2 = x'_1, & \Delta_1 x'_1 = 0 \\ \Delta_1 x''_3 = b x''_2, & \Delta_1 x''_2 = \beta x''_1, & \Delta_1 x''_1 = 0 \\ \Delta_1 x^i_3 = 0, & \quad\text{si} \quad i > 2, & \end{array} \right| \qquad \left( \begin{array}{l} b = 0 \text{ ou } 1 \\ \beta = 0 \text{ ou } 1 \end{array} \right).$$

**48.** Nous allons établir que l'hypothèse de l'existence de plusieurs variables de rang 3 doit être rejetée.

Le groupe G doit, en effet, dériver de la combinaison des substitutions $\sigma$, $S_1$ avec de nouvelles substitutions $\Sigma$ qui n'altèrent plus $x'_3$, $x'_2$, $x'_1$, $x''_1$, et qui donneront aux autres variables des accroissements

$$D x''_2 = \gamma x'_1 + \delta x''_1, \qquad D x^i_3 = c_i x'_2 + d_i x''_2 \qquad (i > 1).$$

Supposons tout d'abord qu'on ait au moins trois variables de rang 3, $x'_3$, $x''_3$, $x'''_3$. Les substitutions $\sigma$ donnent à $x''_2$ un accroissement de rang 1;

$S_1$ le laisse invariable. Mais G doit contenir une substitution au moins qui lui donne un accroissement de rang 2 (n° **11**). Cette substitution $\Sigma_1$ sera de l'espèce $\Sigma$ et différente de l'unité. Elle donnera à $x_3'''$ un accroissement

$$D_1 x_3''' = cx_2' + dx_2''.$$

Mais, étant échangeable à $S_1$, elle doit permuter exclusivement entre elles les fonctions que $S_1$ n'altère pas; donc $c$ sera nul et, comme $D_1 x_3'''$ ne peut être identiquement nul, $d$ sera $\gtrless 0$.

Considérons maintenant la fonction

$$X_3' = x_3''' + \lambda x_3'.$$

Les substitutions $S_1$ et $\Sigma_1$ l'accroissent respectivement de $\lambda x_2'$ et de $dx_2''$; ces deux fonctions sont linéairement distinctes. Donc, en prenant $X_3'$ comme variable indépendante, nous retomberions sur la première hypothèse, déjà complètement discutée (n$^{os}$ **42-45**).

La même démonstration s'appliquerait au cas où l'on n'aurait que deux variables de rang 3, $x_3'$, $x_3''$, mais où $b$ serait nul.

Si $b$ était égal à 1, on aurait

$$S_1 = \left| \begin{array}{lll} \Delta_1 x_3' = x_2', & \Delta_1 x_2' = x_1', & \Delta_1 x_1' = 0 \\ \Delta_1 x_3'' = x_2'', & \Delta_1 x_2'' = \beta x_1'', & \Delta_1 x_1'' = 0 \end{array} \right|,$$

et le groupe abélien dérivé de $\sigma$, $S_1$ n'est pas général, car la substitution

$$\left| \begin{array}{c} \Delta x_3' = \Delta x_2' = \Delta x_1' = 0 \\ \Delta x_3'' = x_2'', \quad \Delta x_2'' = \beta x_1'', \quad \Delta x_1'' = 0 \end{array} \right|$$

est évidemment échangeable à ses substitutions. On devra donc le compléter par l'adjonction d'une substitution au moins de l'espèce $\Sigma$, autre que l'unité. Cette substitution $\Sigma_1$ laissera $x_3'$ invariable et accroîtra $x_3''$ d'une expression de la forme

$$D_1 x_3'' = cx_2' + dx_2''.$$

Mais, si $c$ n'était pas nul, les accroissements $D_1 x_3$, $\Delta_1 x_3''$ seraient deux

fonctions linéairement distinctes et l'on retomberait ainsi sur la première hypothèse.

Si $c = 0$ et $d \gtrless 0$, la fonction $X'_3 = x''_3 + \lambda x'_3$ aurait des accroissements $dx''_2$, $x''_2 + \lambda x'_2$ linéairement distincts. On retomberait encore sur la première hypothèse.

Enfin, si $c$ et $d$ étaient nuls, $\Sigma_1$ laissant $x''_3$ invariable, n'altérerait pas $x''_2 = \Delta_1 x''_3$ (n° **8**). Elle se réduirait donc à l'unité, résultat inadmissible.

**49.** Considérons enfin le cas où il n'existe qu'une variable de rang 3; on aura

$$S_1 = | \Delta_1 x'_3 = x'_2, \quad \Delta_1 x'_2 = x'_1, \quad \Delta_1 x'_1 = 0, \quad \Delta_1 x''_2 = \beta x''_1, \quad \Delta_1 x''_1 = 0 |.$$

Les substitutions $\Sigma$ n'altèrent que $x''_2$ et lui donnent un accroissement de la forme

$$Dx''_2 = \gamma x'_1 + \delta x''_1.$$

Toutes ces substitutions sont évidemment échangeables entre elles, et le groupe cherché s'obtiendra en les adjoignant aux substitutions $\sigma$, $S_1$. D'ailleurs, les deux substitutions $S_1^0$, $S_1^1$, que l'on obtient en faisant successivement $\beta = 0$, $\beta = 1$ dans l'expression de $S_1$, résultent évidemment de la combinaison de l'une d'elles avec une substitution $\Sigma$. On aura donc un seul groupe G, dérivé des substitutions $\sigma$, $S_1^0$, $\Sigma$.

En résumé, nous avons obtenu :

*Quatre* groupes de signature [2, 2, 1] (confirmation d'un résultat déjà trouvé);

*Cinq* de signature [2, 2, 2];

*Un* de signature [2, 2, 3];

*Aucun* de signature [2, 2, $n$], $\quad n > 3$.

### IV. — Récapitulation.

**50.** Parmi les groupes G construits dans la section précédente figurent tous ceux où le nombre $n$ des variables ne surpasse pas 6. Le Tableau suivant indique leur nombre pour chaque signature donnée :

1° *Deux variables.*

| Signature. | Nombre des groupes. |
|---|---|
| [1, 1] | 1 |
| Total | 1 |

2° *Trois variables.*

| Signature. | Nombre des groupes. |
|---|---|
| [1, 2] | 1 |
| [2, 1] | 1 |
| [1, 1, 1] | 1 |
| Total | 3 |

3° *Quatre variables.*

| Signature | Nombre des groupes. | Signature. | Nombre des groupes. |
|---|---|---|---|
| [1, 3] | 1 | [1, 1, 2] | 0 |
| [2, 2] | 1 | [1, 2, 1] | 2 |
| [1, 3] | 1 | [2, 1, 1] | 1 |
| | | [1, 1, 1, 1] | 1 |
| | | Total | 7 |

4° *Cinq variables.*

| Signature. | Nombre des groupes. | Signature. | Nombre des groupes. | Signature. | Nombre des groupes. |
|---|---|---|---|---|---|
| [1, 4] | 1 | [1, 1, 3] | 0 | [1, 1, 1, 2] | 0 |
| [2, 3] | 1 | [1, 2, 2] | 2 | [1, 1, 2, 1] | 0 |
| [3, 2] | 1 | [1, 3, 1] | 3 | [1, 2, 1, 1] | 2 |
| [4, 1] | 1 | [2, 1, 2] | 0 | [2, 1, 1, 1] | 1 |
| | | [2, 2, 1] | 4 | [1, 1, 1, 1, 1] | 1 |
| | | [3, 1, 1] | 1 | | |
| | | | | Total | 18 |

### 5° *Six variables.*

| Signature. | Nombre des groupes. | Signature. | Nombre des groupes. | Signature. | Nombre des groupes. |
|---|---|---|---|---|---|
| [1, 5]..... | 1 | [3, 1, 2]...... | 0 | [2, 1, 1, 2]....... | 0 |
| [2, 4]..... | 1 | [3, 2, 1]...... | 5 | [2, 1, 2, 1]....... | 0 |
| [3, 3]..... | 1 | [4, 1, 1]...... | 1 | [2, 2, 1, 1]....... | 5 |
| [4, 2]..... | 1 | [1, 1, 1, 3].... | 0 | [3, 1, 1, 1]....... | 1 |
| [5, 1]..... | 1 | [1, 1, 2, 2].... | 0 | [1, 1, 1, 1, 2].... | 0 |
| [1, 1, 4]... | 0 | [1, 1, 3, 1].... | 0 | [1, 1, 1, 2, 1].... | 0 |
| [1, 2, 3]... | 7 | [1, 2, 1, 2].... | 0 | [1, 1, 2, 1, 1].... | 0 |
| [1, 3, 2]... | 4 | [1, 2, 2, 1].... | 8 | [1, 2, 1, 1, 1].... | 2 |
| [1, 4, 1]... | 4 | [1, 3, 1, 1].... | 3 | [2, 1, 1, 1, 1].... | 1 |
| [2, 1, 3]... | 0 | | | [1, 1, 1, 1. 1, 1].. | 1 |
| [2, 2, 2]... | 5 | | | | |
| [2, 3, 1]... | 11 | | | | |
| | | | | Total............ | 63 |

# *Sur la croissance des fonctions multiformes;*

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

## Préface.

**1.** Ce travail est la suite d'un autre travail [1] publié dans le même Recueil : *Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches* (*Journal de Mathématiques*, fasc. I, 1906), dans lequel j'ai fait une étude systématique de la croissance des fonctions algébroïdes (ayant un nombre fini de branches); j'y ai démontré qu'elle jouit de la plupart des propriétés fondamentales des algébroïdes uniformes (dites *fonctions entières* ou *méromorphes*). Je me propose d'exposer ici quelques nouveaux résultats concernant la croissance des algébroïdes multiformes et se rattachant à la recherche de la forme la plus générale, sous laquelle le théorème de M. Picard et ses généralisations s'étendent aux algébroïdes multiformes avec *un cas d'exception unique;* ce qui est intéressant, dans cette extension, c'est que la densité des zéros et des infinis n'est pas suffisante pour les algébroïdes *multiformes :* il nous faut aussi tenir compte d'autres éléments qui interviennent et jouent un rôle essentiel.

Mon but principal est de montrer la différence profonde qui existe

[1] Dont la connaissance est nécessaire pour l'intelligence du présent Mémoire; il sera mentionné, au cours de ce travail, par l'expression : Mémoire précédent.

entre la croissance des fonctions algébroïdes et celle des autres transcendantes multiformes; je présente des transcendantes non algébroïdes, qui jouissent de propriétés de croissance très singulières par rapport à celles auxquelles nous sommes habitués jusqu'ici. Pour y arriver, il m'a fallu étendre aux fonctions multiformes le théorème bien connu de Weierstrass sur l'existence d'une fonction entière admettant des zéros donnés; ici les ordres de multiplicité peuvent être aussi fractionnaires. Ce travail est le développement d'une Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 3 septembre 1906.

### L'extension du théorème de Weierstrass.

**2.** Je commencerai par établir l'extension précitée du théorème de Weierstrass : Il est bien connu que, étant donnée une série de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, on peut former une fonction entière (plus précisément, une algébroïde uniforme entière) admettant ces zéros; voyons maintenant s'il est possible de former une algébroïde multiforme admettant comme zéros les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$, avec des degrés de multiplicité respectivement égaux à $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$, qui peuvent être des nombres entiers ou fractionnaires. On dit que $\alpha_i$ est un zéro de la fonction $f(z)$ de degré de multiplicité égal à $k_i$, lorsque l'on a

$$f(z) = (z - \alpha_i)^{k_i} f_i(z), \qquad f_i(\alpha_i) \neq 0 \qquad \text{et fini.}$$

A cet effet, remarquons que, si l'on veut former une fonction multiforme à $n$ branches, tous les dénominateurs des nombres $K_i$, supposés irréductibles, devront être inférieurs à $n$, et, par conséquent, le nombre $1.2.3\ldots n = n!$ sera certainement un multiple commun de tous les dénominateurs. Les produits $k_1 n!, k_2 n!, \ldots, k_n n!$ étant des nombres entiers, posons $k_i n! = \lambda_i$ et formons la fonction entière $G(z)$ admettant comme zéros les mêmes nombres $\alpha_i$ avec des degrés de multiplicité égaux aux nombres entiers $\lambda_i$; il est alors clair que la fonction multiforme $f(z) = G(z)^{\frac{1}{n!}}$ admet les zéros $\alpha_i$ avec des degrés de multiplicité égaux à $\frac{\lambda_i}{n!} = k_i$ et notre problème se trouve résolu.

Il est bien entendu que l'on pourrait employer le plus petit commun multiple des dénominateurs des nombres $k_i$ au lieu de $n!$.

L'algébroïde multiforme ainsi obtenue correspond au produit canonique de Weierstrass relatif aux algébroïdes uniformes; il en résulte que toute algébroïde $F(z)$ peut se mettre sous la forme

$$F(z) = f(z)\, e^{\varphi(z)}. \tag{1}$$

Si nous appelons *algébroïde entière* toute algébroïde n'ayant pas d'infini à distance finie, nous avons aussi le corollaire suivant :

*Toute algébroïde non entière peut se mettre sous la forme du quotient de deux algébroïdes entières.*

La propriété exprimée par l'égalité (1) est fondamentale pour les considérations qui vont suivre.

## Sur quelques transcendantes non algébroïdes.

### *Classe I.*

5. Dans mon travail cité plus haut, j'ai démontré que les transcendantes algébroïdes jouissent, en particulier, de la propriété suivante : *Une fonction algébroïde n'a jamais son ordre de grandeur inférieur à celui de sa dérivée.*

Nous allons démontrer que c'est là une propriété essentielle, sinon caractéristique, des fonctions algébroïdes, en présentant des transcendantes non algébroïdes croissant beaucoup moins vite que leurs dérivées. Dans des travaux antérieurs (*voir* mon Mémoire précité), j'ai donné et justifié la définition de l'ordre de grandeur des transcendantes algébroïdes; celui des algébroïdes non entières est défini, ou bien directement, ou bien à l'aide du corollaire cité dans le numéro précédent par la forme du quotient de deux algébroïdes entières.

Si, par exemple, $F(z) = \dfrac{F_1(z)}{F_2(z)}$, l'ordre de $F(z)$ est égal au plus grand des ordres de grandeur de $F_1(z)$ et $F_2(z)$.

Cela posé, considérons une algébroïde $F(z)$ quelconque et une

valeur exceptionnelle $\alpha$, au sens ordinaire du mot, relatif à la densité des zéros et des infinis de $F(z)-\alpha$; j'entends par là que l'on a

$$F(z)-\alpha = f(z)\,e^{\varphi(z)}, \tag{2}$$

$f(z)$ étant une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à celui de $F(z)$ et $\Phi(z)$ une fonction finie à distance finie; dans cette décomposition, le facteur $f(z)$ est, en général, un quotient de deux produits canoniques de facteurs primaires. Dans mon Mémoire précédent, j'ai démontré que le cas où l'exposant $\varphi(z)$ est aussi algébroïde est d'un caractère exceptionnel, puisqu'il est impossible que cette circonstance se présente pour deux valeurs de $\alpha$; si $F(z)$ est une algébroïde uniforme, ce nouveau cas d'exception unique (double exception) coïncide avec le premier, parce que l'exposant $\varphi(z)$ est aussi uniforme pour tout nombre $\alpha$, exceptionnel ou non.

Je veux actuellement établir que le résultat précité n'est qu'une circonstance particulière d'un autre résultat plus précis, et ce qui caractérise le cas d'exception unique tient à un fait général concernant la croissance de la dérivée $\varphi'(z)$, ou bien celle de la partie réelle et de la partie imaginaire de $\varphi(z)$.

4. Supposons que $F(z)$ croisse comme $e^{\mu(r)}$; j'entends par là que l'on a les relations

$$|F(z)| < e^{\mu(r)^{1+\alpha}}, \qquad \max.|F(z)| > e^{\mu(r)^{1-\alpha}}, \qquad \text{pour } |z| = r,$$

$\alpha$ étant un nombre positif quelconque, la première à partir d'une valeur de $r$ et la seconde pour une infinité de valeurs de $r$ croissantes indéfiniment. La fonction $\varphi(z)$ croissant comme $\mu(r)$ [1], je veux démontrer que cette fonction $\varphi(z)$ jouit, sauf pour une valeur de $\alpha$, au plus, de deux propriétés suivantes : 1° elle n'est pas algébroïde; 2° sa dérivée croît comme $e^{\mu(r)}$, c'est-à-dire beaucoup plus vite que la fonction.

La première propriété est une conséquence de la seconde. La démon-

[1] *Voir* plus bas la preuve de cette assertion (n° 5); elle suppose une restriction que nous citons aussi dans le numéro suivant.

stration de ce théorème se fait par un procédé devenu classique depuis les travaux de M. Borel sur le théorème de M. Picard. Soient $\alpha_1$ et $\alpha_2$ deux valeurs de $\alpha$; l'élimination de $F(z)$ entre les identités

$$F(z)-\alpha_1=f_1(z)\,e^{\varphi_1(z)},\qquad F(z)-\alpha_2=f_2(z)\,e^{\varphi_2(z)}$$

nous conduit à l'identité

$$\alpha_2-\alpha_1=f_1(z)\,e^{\varphi_1(z)}-f_2(z)\,e^{\varphi_2(z)}.$$

Cette identité n'appartient pas tout à fait à la classe de celles que nous avons étudiées dans notre Mémoire précédent (*Journal de Mathématiques*, fasc. I, 1906), puisque les exposants $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ ne sont pas, en général, algébroïdes; mais, les dérivées de ces exposants étant algébroïdes, l'on pourrait établir l'impossibilité de cette identité par la même méthode que celle du Mémoire précédent, si les dérivées $\varphi_1'(z)$ et $\varphi_2'(z)$ croissaient moins vite que $e^{\mu(r)}$, c'est-à-dire s'il y a un nombre positif $\vartheta$ tel que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de $r$,

$$|\varphi_1'(z)|<e^{\mu(r)^{1-\vartheta}},\qquad |\varphi_2'(z)|<e^{\mu(r)^{1-\vartheta}},\qquad |z|=r.$$

En effet, la dérivation nous conduit à l'identité suivante

$$[f_1'(z)+f_1(z)\varphi_1'(z)]\,e^{\varphi_1(z)}-[f_2'(z)+f_2(z)\varphi_2'(z)]\,e^{\varphi_2(z)}=0,$$

dans laquelle les coefficients des exponentielles sont aussi algébroïdes d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$; dès lors, l'impossibilité se manifeste par des raisonnements bien connus [*Voir* les travaux de M. Borel, *Mémoire sur les zéros des fonctions entières* (*Acta Mathematica*, t. XX); aussi la thèse de M. Kraft : *Ueber ganze transcendante Functionen von unendlicher Ordnung*, et la mienne], grâce aux propriétés des fonctions algébroïdes, établies dans notre Mémoire précédent, qui assurent l'existence d'une suite indéfinie d'intervalles, dans lesquels le module maximum de l'exponentielle est supérieur à $e^{\mu(r)^{1-\varepsilon}}$, tandis que le module des coefficients est supérieur à $e^{-\mu(r)^{1-\varepsilon_1}}$ avec $\varepsilon_1>\varepsilon$.

Comme il existe des algébroïdes admettant plusieurs valeurs excep-

tionnelles ordinaires, le résultat auquel nous sommes arrivé [1] nous fait connaître des fonctions non algébroïdes présentant la différence de croissance avec leurs dérivées ci-dessus signalée. D'une façon précise, nous avons établi le théorème suivant :

Théorème I. — *La dérivée $\varphi'(z)$ de l'exposant $\varphi(z)$ ne saurait croître moins vite que $e^{\mu(r)}$ pour plus d'une valeur de $\alpha$.*

Il est clair que ce théorème s'étend de lui-même aux différences $F(z) - W(z)$, $W(z)$ désignant une algébroïde quelconque d'ordre de grandeur inférieur à celui de $F(z)$; il n'y a rien à changer dans nos procédés.

5. Nous avons plus haut émis l'assertion que l'exposant $\varphi(z)$ croît comme $\mu(r)$; j'entends par là que l'on a

$$(3)\qquad \mu(r)^{1+\vartheta} > \max.|\varphi(z)| > \mu(r)^{1-\vartheta},$$

avec quelques intervalles d'exclusion négligeables ($\vartheta$ étant arbitrairement petit). Or, cela n'est pas du tout évident, puisque la seule conséquence immédiate des inégalités

$$|e^{\varphi(z)}| < e^{\mu(r)^{1+\vartheta}}, \qquad \max.|e^{\varphi(z)}| > e^{\mu(r)^{1-\vartheta}}$$

consiste dans les inégalités

$$(4)\qquad [\mu(r)]^{1+\vartheta} > \omega(r) > [\mu(r)]^{1-\vartheta},$$

$\omega(r)$ désignant le maximum des valeurs positives de la partie réelle de $\varphi(z)$, satisfaites dans les mêmes conditions que les premières; il est donc nécessaire de prouver que les inégalités (3) peuvent se déduire des inégalités (4) avec quelques intervalles d'exclusion négligeables. M. Borel y est arrivé pour les algébroïdes uniformes entières [Voir *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta Mathematica*, t. XX) et *Leçons sur les fonctions entières*, p. 63-69, Gauthier-Villars]; nous

[1] Combiné avec le fait qu'un choix convenable de l'algébroïde $F(z)$ nous permet d'affirmer que le module de l'exposant $\varphi(z)$ croît comme $\mu(r)$.

allons étendre ce résultat aux fonctions $\varphi(z)$, que nous considérons dans ce travail, en faisant une certaine hypothèse sur l'algébroïde primitive $F(z)$, dont nous sommes partis.

Supposons que l'algébroïde $u = \frac{F(z) - \alpha}{f(z)}$ soit définie par l'équation

$$(5) \qquad u^n + e^{H_1(z)} u^{n-1} + e^{H_2(z)} u^{n-2} + \ldots + e^{H_{n-1}(z)} u + e^{H_n(z)} = 0,$$

les exposants $H_1(z)$, $H_2(z)$, ..., $H_n(z)$ désignant des fonctions entières (algébroïdes *uniformes* entières); cette algébroïde

$$F_\alpha(z) = \frac{F(z) - \alpha}{f(z)}$$

est visiblement du même ordre de grandeur $e^{\mu(r)}$ que l'algébroïde $F(z)$.

Posons

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \varpi_1(z) + i\theta_1(z), \\ H_2(z) &= \varpi_2(z) + i\theta_2(z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ H_n(z) &= \varpi_n(z) + i\theta_n(z), \end{aligned}$$

les $\varpi_i$ désignant les parties réelles et les $i\theta_i$ les parties imaginaires des fonctions entières $H_i(z)$; posons aussi

$$u = F_\alpha(z) = R(r, \mathfrak{Z})\, e^{i\omega(r, \theta)},$$

$R(r, \theta)$ désignant le module de $u$, $\omega(r, \theta)$, son argument, et $r$, $\mathfrak{Z}$ les coordonnées polaires du point $z$ et remarquons que l'équation (5) prend ainsi la forme

$$(5') \quad \left\{ \begin{aligned} & R^n e^{in\omega} + R^{n-1} e^{\varpi_1} e^{i[(n-1)\omega + \theta_1]} \\ & \qquad + R^{n-2} e^{\varpi_2} e^{i[(n-2)\omega + \theta_2]} + \ldots + R\, e^{\varpi_{n-1}} e^{i(\omega + \theta_{n-1})} + e^{\varpi_n} e^{i\theta_n} = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, on a

$$|\theta_i| < |H_i| < |\mu(r)|^{1+\beta},$$

d'après le résultat plus haut cité de M. Borel, établi pour les algé-

broïdes uniformes entières; on a, en effet,

$$|\mathrm{H}_i| < (\max.|\varpi_i|)^{1+\beta} < \mu(r)^{1+\beta} \quad (^1).$$

On s'en rend aisément compte en remarquant que le maximum de $e^{\varpi_i}$ n'est pas d'ordre de grandeur supérieur à $e^{\mu(r)}$, conformément à la définition de l'ordre de grandeur d'une algébroïde multiforme, donnée dans mon Mémoire précédent, et les résultats établis dans le même Mémoire. Nous y avons démontré que, si $e^{\mu(r)}$ est le plus grand des ordres de grandeur des coefficients de l'équation, qui définit une algébroïde multiforme $u = \mathrm{M}(z)$, nous avons les inégalités

$$|\mathrm{M}(z)| < e^{\mu(r)^{1+\beta}}, \qquad \max.|\mathrm{M}(z)| > e^{\mu(r)^{1-\beta}}, \qquad |\mathrm{M}(z)| > e^{-\mu(r)^{1+\beta}},$$

$\beta$ étant arbitrairement petit, la première et la troisième pour toutes les branches et la deuxième pour une, au moins, des branches; il y a, bien entendu, des intervalles d'exclusion, pour lesquels je renvoie le lecteur au Mémoire précédent.

Supposons maintenant qu'il existe un nombre positif $p$ tel que l'inégalité

$$(6) \qquad \max.(\omega) > \mu(r)^{1+p}$$

soit satisfaite pour une infinité de valeurs de $r$ croissant indéfiniment. Les inégalités

$$|\theta_i| < [\mu(r)]^{1+\beta} \qquad \text{et} \qquad (n-i)|\theta_i| < \mu(r)^{1+\beta_1} \qquad (\beta_1 > \beta),$$

étant satisfaites quelque petits que soient les nombres positifs $\beta$ et $\beta_1$ avec quelques intervalles d'exclusion d'étendue négligeable (*voir* les travaux plus haut cités de M. Borel), nous aurons l'inégalité

$$|(n-i)\omega_i + \theta_i| > [\mu(r)]^{1+p} - [\mu(r)]^{1+\beta_1},$$

satisfaite pour des points d'une infinité de cercles de rayon $r$ croissant indéfiniment; il suffit, pour cela, que l'inégalité (6) soit satisfaite sur

---

(1) $b$ et $\beta$ étant des nombres positifs arbitrairement petits.

des intervalles d'une étendue supérieure à celle des intervalles d'exclusion, que comportent les identités $|\theta_i| < |\mu(r)|^{1+\beta}$. Nous avons

$$[\mu(r)]^{1+p} - [\mu(r)]^{1+\beta_1} > [\mu(r)]^{1+p_1},$$

$p_1$ étant un nombre quelconque inférieur à $p$, parce que $\beta_1$ est arbitrairement petit; il en résulte que, pour les points où $\omega$ a sa valeur maximum, les arguments de tous les termes de l'équation (5'), *sauf le dernier*, sont supérieurs à $[\mu(r)]^{1+p_1}$, $p_1$ étant un nombre quelconque inférieur à $p$.

Pour aller maintenant plus loin, il faut avoir recours à une propriété de l'argument d'une somme de nombres : Étant donnés les arguments $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ des nombres ayant comme affixes les points $M_1(\rho_1, \gamma_1)$, $M_2(\rho_2, \gamma_2)$, $\ldots$, $M_n(\rho_n, \gamma_n)$, l'argument de la somme de ces nombres sera de la forme

$$\gamma + 2k\pi i,$$

$k$ étant un entier quelconque et $\gamma$ un argument (angle) supérieur au plus petit des arguments $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$; il est, en effet, clair que l'affixe de la somme sera un point M tel que le vecteur OM se trouve entre les vecteurs $OM_1$, $OM_2$, $\ldots$, $OM_n$. Si nous appelons $a(r)$ l'argument de la somme des $n$ premiers termes de l'équation (5') et $R_1$ son module, nous aurons

$$R_1 e^{a i} = - e^{\omega_n} e^{i\theta_n}$$

et

(7) $$a(r) = a_0(r) + 2\pi i D(r),$$

$a_0(r)$ étant une fonction continue de $r$ supérieure toujours à l'argument $\omega + \theta_{n-1}$, qui est le plus petit parmi ceux des $n$ premiers termes de l'équation (5'); on aura donc

$$a_0(r) > [\mu(r)]^{1+p_1}.$$

D'autre part, $D(r)$ ne saurait prendre que des valeurs qui soient des nombres entiers; nous en concluons que $D(r)$ sera une constante, puisque c'est la différence de deux fonctions $a(r)$ et $a_0(r)$ continues

de $r$. On en déduit immédiatement

$$|a(r)| > [\mu(r)]^{1+p_2},$$

$p_2$ étant un nombre quelconque inférieur à $p_1$.

Dès lors, l'égalité

$$R_1 e^{at} = e^{\omega_n} e^{i(\theta_n+\pi)}$$

entraîne la suivante

$$|\theta_n| > [\mu(r)]^{1+p_3} \qquad (p_3 < P_2 \text{ mais quelconque}),$$

ce qui est en contradiction avec le résultat plus haut cité de M. Borel exprimé par l'inégalité

$$|\theta_n| < [\mu(r)]^{1+\beta},$$

$\beta$ étant arbitrairement petit.

Il est donc impossible qu'il y ait un nombre $p$ tel que l'inégalité (6) soit satisfaite pour des intervalles d'étendue plus grande que celle qui a été donnée par M. Borel pour les intervalles d'exclusion que comporte son théorème, dont nous avons obtenu l'extension à la classe considérée d'algébroïdes multiformes. Nous avons le théorème suivant :

*Si* $M(z) = R e^{\omega i}$ *est une algébroïde multiforme définie par une équation de la forme* (5), *l'inégalité*

$$|\omega| < \mu(r)^{1+\beta}$$

*sera satisfaite pour tout nombre positif* $\beta$ *avec quelques intervalles d'exclusion négligeables.* $M(z)$ *est supposée d'ordre de grandeur* $e^{\mu(r)}$.

Ce théorème entraîne comme corollaire le fait que la fonction

$$\Lambda(z) = \log M(z) = \log R + i\omega$$

satisfait aussi à l'inégalité

$$|\Lambda(z)| < [\mu(r)]^{1+\beta}.$$

Ainsi le théorème démontré par M. Borel pour le logarithme des fonctions de la forme $e^{H(z)}$, $H(z)$ étant une algébroïde uniforme entière, a été étendu ici au logarithme des algébroïdes multiformes $M(z)$ définies par une équation de la forme (5) qui n'admettent aussi aucun zéro et aucun infini et qui peuvent se mettre sous la forme

$$M(z) = e^{\varphi(z)},$$

$\varphi(z)$ étant une fonction finie à distance finie.

Le fait que ce théorème ne saurait être étendu à toutes les algébroïdes apparaît immédiatement sur les algébroïdes les plus élémentaires, qui n'appartiennent pas à la classe particulière plus haut considérée; considérons, en effet, la fonction $\log z = \log r + i\vartheta$ (1); le module de la partie imaginaire $i\vartheta$ ne dépend pas de $r$ et prend des valeurs indéfiniment grandes pendant que $r$ reste constant.

### Les propriétés des fonctions de classe I.

**6.** Si nous faisons la substitution $u = \frac{F - \alpha}{f}$ sur l'équation (5), $f$ désignant une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à celui de $F(z)$, l'équation transformée ne sera plus de la forme (5); ses coefficients seront de la forme d'une somme de termes tels que $f_i(z)\, e^{H_i(z)}$, $H_i(z)$ étant une fonction (algébroïde uniforme) entière et $f_i(z)$ une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à celui de $H_i(z)$. Si l'algébroïde primitive $F(z)$, envisagée dans les paragraphes précédents, est de la forme de la transformée de (5), l'algébroïde $e^{\varphi(z)}$ est de la classe définie par les équations de forme (5), et, par conséquent, le module de $\varphi(z)$ croît comme $\mu(r)$, satisfaisant aux inégalités

$$(7') \qquad |\varphi(z)| < |\mu(r)|^{1+\beta}, \qquad \max.|\varphi(z)| > [\mu(r)]^{1-\beta}.$$

Si l'algébroïde $F(z)$ est définie par l'équation

$$(8) \quad \Psi(z, u) = u^n + B_1(z) u^{n-1} + \ldots + B_{n-1}(z)\, u + B_n(z) = 0,$$

---

(1) Log $z$ est le logarithme de l'algébroïde $u = z = re^{\theta i}$.

dont les coefficients sont déterminés par les équations

$$\Psi(z, \alpha_1) = e^{H_1(z)}, \qquad \Psi(z, \alpha_2) = e^{H_2(z)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Psi(z, \alpha_{n-1}) = e^{H_{n-1}(z)}, \qquad \Psi(z, \alpha_n) = e^{H_n(z)},$$

elle admet $n$ valeurs exceptionnelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et les coefficients $B_i(z)$ sont de la forme

$$B_i(z) = \lambda_{i,1} e^{H_1(z)} + \lambda_{i,2} e^{H_2(z)} + \ldots + \lambda_{i,n} e^{H_n(z)} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

les $\lambda_{i,j}$ désignant des constantes; il est clair que la fonction $F(z) - \alpha$ [1], qui n'admet aucun zéro et aucun infini, satisfait à une équation analogue à (8).

Or, il est aisé de prouver que cette classe d'algébroïdes entières et dépourvues de zéros jouit de la même propriété que la classe définie par des équations de la forme (5). Cela tient à ce que l'argument de la somme

$$(9) \qquad \lambda_1 e^{H_1(z)} + \lambda_2 e^{H_2(z)} + \ldots + \lambda_n e^{H_m(z)},$$

les $\lambda_i$ désignant des constantes, est donné encore par la formule

$$\mathrm{a}(r) = \mathrm{a}_0(r) + 2k\pi i,$$

$\mathrm{a}_0(r)$ étant une quantité (variant d'une façon continue par rapport à $r$) comprise entre le plus grand et le plus petit argument des termes $\lambda_i e^{H_i(z)}$. Si donc l'algébroïde considérée est de l'ordre de grandeur $e^{\mu(r)}$, les arguments de tous les termes de la somme (9) étant inférieurs à $[\mu(r)]^{1+\beta}$, il en sera de même de l'argument de la somme (9) et, par conséquent, de tous les coefficients de l'équation qui définit l'algébroïde en question $M(z)$.

Dès lors, les raisonnements, exposés dans le numéro précédent, montrent bien que l'argument $\omega$ de cette algébroïde $M(z)$ satisfait à l'inégalité

$$|\omega| < [\mu(r)]^{1+\beta_1} \qquad (\beta_1 \text{ arbitrairement petit})$$

---

[1] $\alpha$ est supposé égal à un des nombres exceptionnels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

et le théorème du numéro précédent se trouve généralisé et établi pour toutes les algébroïdes définies par une équation dont les coefficients sont de la forme (9), quel que soit l'entier $m$. Pour abréger le langage, nous appellerons *exponentielle* cette classe de fonctions algébroïdes.

Notons que, dans la somme (9), les exposants $H_i(z)$ peuvent bien être des *constantes*.

**7.** Si donc l'algébroïde primitive $F(z)$ est de la classe exponentielle, il en est de même de $F(z) - \alpha$, $\alpha$ étant un nombre quelconque; si $\alpha$ est une valeur exceptionnelle telle que

$$F(z) - \alpha = e^{\varphi_\alpha(z)}, \tag{10}$$

$\varphi_\alpha(z)$ croîtra comme $\mu(r)$ avec le sens plusieurs fois répété; or, nous avons vu, d'après le théorème I du paragraphe 4, que la dérivée $\varphi'_\alpha(z)$ ne saurait croître moins vite que $e^{\mu(r)}$ pour plus d'une valeur de $\alpha$; *il y a donc là une source de fonctions croissant comme $\mu(r)$, dont la dérivée croît comme $e^{\mu(r)}$, c'est-à-dire beaucoup plus vite que la fonction;* leur existence est assurée par le fait qu'il y a des algébroïdes de la classe exponentielle admettant plusieurs valeurs exceptionnelles du caractère indiqué par l'équation (10) et consistant en l'absence totale de zéros et d'infinis; cela, qui est d'ailleurs visible, a été mis en évidence dans le numéro précédent.

Si l'algébroïde primitive $F(z)$ n'est pas de la classe exponentielle, l'ordre de grandeur de l'exposant $\varphi_\alpha(z)$ est inconnu; dans ce cas, les conséquences du théorème I donnent naissance à des fonctions $\varphi_\alpha(z)$ présentant une autre propriété aussi singulière que celle qui correspond au cas où $F(z)$ est de la classe exponentielle. En effet, l'exposant $\varphi_\alpha(z)$ ou bien sera d'ordre de grandeur $\mu(z)$ et alors nous aurons la même différence entre son ordre de grandeur et celui de sa dérivée que dans le cas précédent, ou bien il présentera la propriété suivante :

*Si nous posons*

$$\varphi_\alpha(z) = \varpi_\alpha(z) + i\,\omega_\alpha(z),$$

$\varpi_\alpha(z)$ *étant la partie réelle de* $\varphi_\alpha(z)$, *la fonction* $\omega_\alpha(z)$ *croîtra plus*

*vite que la partie réelle* $\varpi_\alpha(z)$; *j'entends par là que l'on aura*

$$|\omega_\alpha(z)| > [\mu(r)]^{1+p} \ (^1) \qquad (p \text{ étant un nombre positif}).$$

Nous avons donc le théorème général suivant :

Théorème II. — *Si* F$(z)$ *est une algébroïde quelconque et* $\alpha$ *une valeur exceptionnelle telle que*

$$F(z) - \alpha = e^{\varphi_\alpha(z)},$$

$\varphi_\alpha(z)$ *étant toujours finie à distance finie, cette dernière fonction présente (sauf pour une valeur au plus de* $\alpha$) *une des propriétés suivantes :* $\alpha$! *ou bien,* $\varphi_\alpha(z)$ *croissant comme* $\mu(r)$, *la dérivée* $\varphi'_\alpha(z)$ *croît comme* $e^{\mu(r)}$; $\beta$! *ou bien sa partie imaginaire croît plus vite que sa partie réelle dans le sens plus haut indiqué.*

Nous pouvons même, en précisant, exprimer ces propriétés sous la forme suivante : ou bien $\varphi'_\alpha(z)$ croît plus vite que $\varphi_\alpha(z)$, ou bien la partie imaginaire $\omega_\alpha(z)$ de $\varphi_\alpha(z)$ croît plus vite que $e^{[\mu(r)]^{1-\varepsilon}}$, $\varepsilon$ étant un nombre positif arbitrairement petit. Si, en effet, la seconde propriété existe, l'ordre de grandeur de $\varphi_\alpha(z)$ ne sera pas inférieur à $e^{\mu(r)}$, ainsi que celui de la dérivée $\varphi'_\alpha(z)$ (²) et, alors, nous n'avons plus les conditions de l'impossibilité de l'identité à laquelle nous conduit l'élimination (*voir* le n° 4) de F$(z)$ entre les équations

$$F(z) - \alpha = e^{\varphi_\alpha(z)} \qquad \text{et} \qquad F(z) - \alpha_1 = e^{\varphi_{\alpha_1}(z)}.$$

Remarquons encore que, lorsque F$(x)$ est de la classe exponentielle, il n'y a que le premier cas du théorème II qui se présente; dans ce cas, nous faisons l'hypothèse restrictive que la différence $F(z) - \alpha$ n'ait aucun zéro et aucun infini. Nous sommes affranchis de cette restriction dans le cas où F$(z)$ n'est pas de la classe exponentielle; la conclusion subsiste évidemment pour toute valeur exceptionnelle $\alpha$,

---

(¹) Satisfaite pour une infinité de valeurs de $r$ de module croissant indéfiniment remplissant des intervalles d'étendue assez grande.

(²) Nous ne pourrions rien conclure pour la croissance de la dérivée $\varphi'_\alpha(z)$.

mais on a moins de précision, puisque le second cas du théorème II peut se présenter aussi bien que le premier.

L'énoncé du théorème II s'applique au cas général exprimé par l'égalité

$$F(z) - \alpha = f_\alpha(z) e^{\varphi_\alpha(z)}$$

ou bien

$$F(z) - a(z) = f(z) e^{\varphi(z)},$$

$a(z)$ et $f_\alpha(z)$ désignant des algébroïdes d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$ et $\varphi_\alpha(z)$ et $\varphi(z)$ des fonctions toujours finies à distance finie. La chose se manifeste d'elle-même.

**8.** On comprend bien l'importance de ces résultats en remarquant que ce sont là des propriétés de croissance auxquelles nous ne sommes pas habitués; l'ordre de grandeur d'une fonction algébroïde n'est jamais inférieur à celui de sa dérivée et la partie réelle (sa valeur maximum) est du même ordre de grandeur que le module pour une algébroïde uniforme entière, d'après les résultats plus haut cités de M. Borel. Nous pouvons prouver ici qu'il en est de même pour toute algébroïde multiforme (¹); considérons l'algébroïde $u = M(z)$ définie par l'équation

$$u^n + A_1(z) u^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(z) u + A_n(z) = 0$$

et supposons qu'elle soit d'ordre de grandeur $e^{\mu(r)}$; $\varpi_i(r, \theta)$ désignant la partie réelle de la branche $u_i$ et $W_i(r, \theta) i$ la partie imaginaire. Nous remarquons tout d'abord que les parties réelles des coefficients $A_i(z)$ sont des fonctions algébriques entières des $\varpi_i(r, \theta)$ et $W_i(r, \theta)$; si donc on avait pour toutes lés branches les inégalités

$$|\varpi_i| < M(r)^{1-p}, \qquad |W_i| < M(r)^{1-p}, \qquad M(r) = e^{\mu(r)},$$

il en serait de même de la partie réelle de tous les coefficients, pourvu que l'on remplace $p$ par un nombre $p_1 < p$ et quelconque. On aurait donc

$$\text{partie réelle de } A_i(z) < |M(r)|^{1-p_1} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

(¹) Appartenant à une classe très étendue, d'ailleurs.

ce qui est impossible d'après les résultats de M. Borel sur les fonctions entières (algébroïdes uniformes), puisque les coefficients $A_i(z)$ ne sont pas tous d'ordre de grandeur inférieur à $M(r) = e^{\mu(r)}$. On ne compte pas ici, bien entendu, quelques intervalles d'exclusion négligeables. Nous en concluons qu'il y aura une des inégalités

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \max.\varpi_i > [M(r)]^{1-\varepsilon} \\ \max.W_i > [M(r)]^{1-\varepsilon} \end{array} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui sera satisfaite, sauf les intervalles d'exclusion négligeables.

Ce résultat n'est pas visiblement complet, parce qu'il y a l'ambiguïté suivante : c'est la partie réelle ou bien la partie imaginaire d'une branche au moins qui satisfera à une inégalité de la forme (11)? Pour le moment, nous ne possédons pas le résultat complet que nous avons en vue. Il en est autrement, si nous faisons une légère restriction, en supposant que l'ordre de grandeur du coefficient $A_1(z)$ ne soit pas inférieur à $e^{\mu(r)}$; dans ce cas, notre but sera atteint. Si, en effet, on avait pour toutes les branches

$$|\varpi_i| < [M(r)]^{1-p} \qquad [M(r) = e^{\mu(r)}],$$

sauf des intervalles d'exclusion négligeables, on aurait aussi

$$\max.P(r, \theta) < [M(r)]^{1-p_1} \qquad (p_1 < p),$$

puisque l'on a

$$P(r, \theta) = \varpi_1(r, \theta) + \varpi_2(r, \theta) + \ldots + \varpi_n(r, \theta).$$

Or, cette dernière inégalité est absurde, parce que, conformément au résultat plus haut cité de M. Borel, nous avons l'inégalité

$$\max.P(r, \theta) > [M(r)]^{1-\varepsilon},$$

quelque petit que soit $\varepsilon$, à partir d'une valeur de $r$, sauf des intervalles d'exclusion négligeables. Nous sommes donc conduits à la conclusion que l'inégalité

$$\max.\varpi_i > [M(r)]^{1-\varepsilon}$$

---

([1]) $P(r\theta)$ désignant la partie réelle du coefficient $A_1(z)$.

sera satisfaite pour une, au moins, des branches, $\varepsilon$ étant arbitrairement petit. Nous avons donc obtenu le résultat voulu. Si nous faisons la substitution $u = i\chi$, nous démontrons que la partie imaginaire d'une branche au moins jouit aussi de la même propriété. Il n'est pas douteux qu'une nouvelle tâche pourra lever la petite restriction que nous venons de faire.

### L'extension d'un théorème de M. Hadamard.

9. Dans le cours des considérations précédentes, nous avons fait de nombreuses applications du théorème bien connu de M. Hadamard sur la relation qui existe entre l'ordre de grandeur d'une algébroïde entière (dont une limite supérieure est donnée) et la densité des zéros, en supposant qu'il soit étendu aux algébroïdes multiformes. Je me propose d'exposer dans ce Chapitre la preuve de cette extension; pour faire la démonstration voulue, il faut d'abord remarquer que, si la fonction multiforme $u = M(z)$ est définie par l'équation

$$(12) \quad A_0(z)u^n + A_1(z)u^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(z)u + A_n(z) = 0,$$

les zéros de $M(z)$ coïncident avec ceux de $A_n(z)$, qui est une fonction (uniforme) entière, et les infinis de $M(z)$ coïncident avec les zéros de $A_0(z)$; mais cela ne suffit pas pour faire une comparaison de l'ordre de grandeur du produit canonique des zéros et infinis de $M(z)$ avec celui du produit canonique des zéros de $A_n(z)$ et $A_0(z)$; il faudra encore tenir compte de la différence des degrés de multiplicité. Pour nous en rendre compte, nous devons nous reporter au mode de formation du produit canonique des zéros et des infinis de $M(z)$; considérons, à cet effet, un zéro $z = b_i$ de $M(z)$ et supposons que son degré de multiplicité par rapport à $M(z)$ soit égal à

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \ldots + \frac{p_k}{q_k} \qquad (q_1 < n,\ q_2 < n,\ \ldots,\ q_k < n),$$

$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}$ étant les degrés de multiplicité correspondant aux divers systèmes circulaires, dans lesquels se décompose l'ensemble des

branches de $u = M(z)$ qui s'annulent en $z = b_i$; la fonction uniforme $\frac{A_n(z)}{A_0(z)}$ étant égale (au signe près) au produit des diverses branches de $M(z)$, l'ordre de multiplicité du point $z = b_i$ par rapport à cette fonction, désigné par $\lambda$, satisfait à la relation

$$\lambda = p_1 + p_2 + \ldots + p_k,$$

si l'on suppose que les nombres $q_1, q_2, \ldots, q_k$ désignent exactement les nombres de branches qui constituent les divers systèmes circulaires correspondants, ce qui est bien légitime. D'autre part, conformément à ce que nous avons dit dans le n° **2** de ce travail, le produit canonique des zéros de $M(z)$ est égal à $[G(z)]^{\frac{1}{n!}}$, $G(z)$ désignant le produit canonique *entier* formé avec les mêmes zéros $b_i$ ayant un degré de multiplicité égal (pour le zéro $z = b_i$) à

$$p_1\mu_1 + p_2\mu_2 + \ldots + p_k\mu_k,$$

les $\mu_i$ donnés par les égalités suivantes :

$$\mu_1 = \frac{n!}{q_1}, \qquad \mu_2 = \frac{n!}{q_2}, \qquad \ldots, \qquad \mu_k = \frac{n!}{q_k}.$$

Les entiers $\mu_i$ étant supérieurs à l'unité, on a l'inégalité

$$p_1\mu_1 + p_2\mu_2 + \ldots + p_k\mu_k > p_1 + p_2 + \ldots + p_k,$$

laquelle montre que la densité des zéros de $G(z)$ n'est pas inférieure à celle des zéros de $\frac{A_n(z)}{A_0(z)}$. De même, les entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ étant inférieurs à $n!$, nous aurons l'inégalité

$$(12) \qquad p_1\mu_1 + p_2\mu_2 + \ldots + p_k\mu_k < n!(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)$$

qui montre que la densité des zéros de la fonction entière $G(z)$ n'est pas supérieure à celle des zéros de la fonction $\left[\frac{A_n(z)}{A_0(z)}\right]^{n!}$ dont l'ordre de grandeur n'est pas supérieur à $e^{\mu(r)}$ [qui est l'ordre de grandeur de l'algébroïde $M(z)$ donnée par l'équation (12)], puisqu'il en est ainsi

de la fonction $\frac{A_n(z)}{A_0(z)}$. Or, il est bien connu que M. Borel a montré que, si l'on prend les produits canoniques de genre fini ou *infini* d'une façon convenable, on a l'avantage que la densité des zéros atteint précisément la limite supérieure donnée par M. Hadamard comme conséquence de l'ordre de grandeur.

C'est là une propriété très importante des produits canoniques de facteurs primaires qui ne contiennent pas de facteurs exponentiels superflus; ce sont ces produits canoniques que j'envisage ici. Il en résulte que la densité des zéros de $G(z)$ n'est pas supérieure à celle que fournit, pour un ordre de grandeur égal à $e^{\mu(r)}$, le théorème classique de M. Hadamard précisé, de la façon précitée, par M. Borel [*voir* E. Borel, *Mémoire sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX, p. 379, 380 et 381)] (¹). Les raisonnements ci-dessus exposés nous conduisent à la conclusion que l'algébroïde uniforme $G(z)$ ne saurait croître plus vite que $e^{\mu(r)}$; il en sera donc de même de la fonction $[G(z)]^{\frac{1}{n}}$, c'est-à-dire du produit canonique des zéros de l'algébroïde $M(z)$. Le produit canonique des infinis de la même algébroïde jouit de la même propriété et nous sommes ainsi arrivés à établir le théorème suivant :

Théorème III. — *Le produit canonique des zéros et des infinis d'une algébroïde multiforme (ou uniforme) n'a jamais son ordre de grandeur supérieur à celui de la fonction.*

Nous avons ainsi acquis l'extension aux algébroïdes multiformes du théorème précité de MM. Hadamard et Borel; il en résulte que la décomposition de ces fonctions indiquée dans ce travail jouit aussi bien que celle des algébroïdes uniformes de la propriété avantageuse qui consiste en ce que les deux facteurs de la décomposition ne croissent pas plus vite que la fonction elle-même.

---

(¹) Ce n'est pas surtout la densité des zéros qui nous occupe ici, parce qu'elle est étudiée et déterminée en détail dans ma thèse (*Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes*, Paris, Gauthier-Villars) et d'autres travaux. Il s'agit ici de l'ordre de grandeur du produit canonique multiforme, que nous présentons dans ce travail.

Dans ces recherches, pour fixer les idées, je me suis attaché à la définition de l'ordre de grandeur usuelle de MM. Hadamard et Borel, en mettant de côté les précisions de cette notion données par MM. Boutroux et Lindelöf pour le cas d'ordre fini et par M. Maillet pour le cas d'ordre infini. La généralisation de ces résultats serait, je pense, très aisée [*voir* mon travail *Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, fasc. III, 1905)].

Je termine ce Chapitre par la remarque que les développements et les progrès de la théorie des algébroïdes multiformes, accomplis d'une façon conforme à la théorie des fonctions dites *entières* ou *méromorphes*, demandent une dénomination plus précise de ces dernières fonctions que je me propose d'appeler *algébroïdes uniformes entières ou non*. L'ancienne dénomination est, évidemment, insuffisante.

*Classe II.*

**10.** Nous allons maintenant faire connaître la génération d'autres fonctions jouissant d'autres propriétés de croissance d'un caractère encore plus éloigné de celui qui caractérise les fonctions élémentaires.

Posons

$$\varphi(z) = e^{\zeta(z)},$$

c'est-à-dire

$$F(z) - \alpha = f(z)e^{e^{\zeta(z)}} \tag{13}$$

et remarquons que la fonction $\zeta(z)$ peut avoir des infinis, qui seraient des zéros de $\varphi(z)$, mais cela ne nous empêche pas de considérer l'ordre de grandeur de $\zeta(z)$ pour $r$ croissant indéfiniment; il n'y a qu'à faire une exclusion du voisinage immédiat de ces points analogue à celle qui a été employée par MM. Borel et Boutroux, dans des circonstances analogues [1], pour nous borner à la croissance relative à la singularité essentielle de laquelle on s'approche. La dérivation de l'équation (13)

---

[1] E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières et méromorphes* (Gauthier-Villars). — Boutroux, *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (Thèse de doctorat, 1903).

nous donne

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &F'(z) = [f'(z) + f(z)e^{\zeta(z)}\zeta'(z)]e^{\varphi(z)} \\ &\text{ou bien} \\ &\zeta'(z) = \frac{F'(z)e^{-\varphi(z)} - f'(z)}{f(z)e^{\zeta(z)}}, \end{aligned}\right.$$

ce qui nous montre que la dérivée $\zeta'(z)$ n'est pas, en général, algébroïde, puisque, parmi les fonctions figurant dans le second membre de (14), il y en a une, $e^{\zeta(z)}$, qui ne saurait être algébroïde que dans le cas d'exception unique relatif à la classe précédente (classe I); l'ordre de grandeur de $\zeta'(z)$ a cependant un sens bien déterminé, parce qu'elle est une fonction rationnelle de fonctions d'ordre de grandeur bien déterminé; les fonctions $F'(z)$, $e^{-\varphi(z)}$, $f(z)$ et $f'(z)$ sont, en effet, algébroïdes et l'autre $\varphi(z) = e^{\zeta(z)}$ (¹) a un ordre de grandeur déterminé égal à $\mu(r)$ si l'algébroïde primitive est de la classe exponentielle, hypothèse que nous ferons pour ce qui va suivre.

Des raisonnements identiques à ceux qui nous ont servi à la classe I montrent que la fonction

$$f'(z) + f(z)\varphi(z)\zeta'(z)$$

ne saurait croître moins vite que $e^{\mu(r)}$ pour plus d'une valeur de $\alpha$; il en résulte qu'il en sera de même de $\zeta'(z)$, parce que toutes les autres fonctions $f(z)$, $f'(z)$ et $\varphi(z)$ croissent, par hypothèse, moins vite que $e^{\mu(r)}$. Remarquons seulement que $f(z)$ doit être supposée égale à une constante si l'on veut que l'ordre de grandeur de $\varphi(z)$ soit égal à $\mu(r)$; posons donc $f(z) = \gamma$ ($\gamma$ étant une constante) et distinguons les deux cas suivants :

$\alpha$! La fonction $\zeta(z)$ peut avoir son ordre de grandeur égal à $\log\mu(r)$

---

(¹) Le module minimum de $\varphi(z)$ correspond au module minimum de $F(z) - \gamma$, qui est une fonction algébroïde; c'est pour cela que $\varphi(z)$ obéit aussi au théorème classique du module minimum de M. Hadamard. Nous voyons, d'ailleurs, que la partie réelle de $\varphi(z)$ est plus grande que $[\mu(r)]^{1-\varepsilon}$, lorsque l'on a

$$\left|\frac{F(z) - \alpha}{\gamma}\right| > e^{[\mu(r)]^{1-\varepsilon}}.$$

avec le sens indiqué par les inégalités suivantes :

$$(15)\qquad \begin{cases} (1-\beta)\log\mu(r) < \max.|\zeta(z)| < (1+\beta)\log\mu(r) \\ (\beta \text{ étant arbitrairement petit}) \end{cases}$$

que l'on déduit des inégalités (7') (*voir* le n° 6) en prenant les logarithmes des deux membres; le maximum des valeurs positives de la partie réelle de $\zeta(r)$ satisfera, évidemment, aux inégalités (15), mais nous ne pouvons rien savoir, *a priori*, pour le maximum du module (valeur absolue) de la partie réelle, ni pour la croissance du module de la partie imaginaire de $\zeta(z)$. Si donc nous supposons que $\zeta(r)$ croisse comme $\log\mu(r)$ et que nous exclnions le cas d'exception unique où $\zeta'(z)$ est d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$, nous obtenons *des fonctions $\zeta(z)$ d'ordre de grandeur $m(r) = \log\mu(r)$ dont la dérivée croît comme $e^{e^{m(r)}}$*. Il y a là une différence d'ordre de grandeur entre une fonction et sa dérivée qui est plus grande que dans la classe I.

β! La fonction $\zeta(z)$ peut avoir un ordre de grandeur supérieur à $\log\mu(r)$; si cet ordre de grandeur est inférieur à $e^{\mu(r)}$ (plus précisément à $e^{[\mu(r)]^{1-p}}$, $p$ étant un certain nombre), il y aura encore une différence d'ordre de grandeur, entre les fonctions $\zeta(z)$ et $\zeta'(z)$, qui peut être plus faible que dans le cas précédent, mais toujours remarquable. Si l'ordre de grandeur du module de $\zeta(z)$ est égal ou supérieur à $e^{\mu(r)}$, *nous aurons alors une différence d'ordre de grandeur qui peut,* a priori, *être arbitrairement grande entre le maximum des valeurs positives de la partie réelle de $\zeta(z)$ et celui du module de la partie imaginaire, ou bien entre le maximum des valeurs positives de la partie réelle de $\zeta(z)$ et la même quantité pour la partie réelle de $-\zeta(z)$. D'une façon plus précise, dans cette hypothèse, si je pose $\zeta(z) = \zeta_1 + i\zeta_2$, $\zeta_1$ désignant la partie réelle de $\zeta(z)$, ou bien le maximum du $|\zeta_2|$ ou bien le maximum (algébrique) de $-\zeta_1$ aura un ordre de grandeur qui n'est pas inférieur à $e^{m(r)}$,*

$$m(r) = \log\mu(r)$$

*designant l'ordre de grandeur du maximum algébrique de $\zeta_1$.*

Nous pouvons même remarquer que, *a priori*, le maximum de $|\zeta_2|$ et le maximum algébrique de $-\zeta_1$ peuvent avoir un ordre de grandeur indéfiniment élevé. Tous ces résultats supposent l'exclusion du cas d'exception unique que comporte le théorème suivant :

Théorème IV. — *La dérivée $\zeta'(z)$ ne saurait croître moins vite que $e^{\mu(r)}$, dans le sens plusieurs fois indiqué, pour plus d'une valeur de $\alpha$.*

De ce théorème résultent comme conséquences les résultats ci-dessus développés sur la croissance des diverses parties de $\zeta(z)$.

**11**. Nous terminerons ce Chapitre par les remarques suivantes : En disant que $\zeta'(z)$ croît comme $e^{e^{m(r)}}$ dans le cas $\alpha!$, nous entendons que $\zeta'(z)$ satisfait aux inégalités suivantes :

$$e^{e^{(1-\beta)\, m(r)}} > \max. |\zeta'(z)| < e^{e^{(1+\beta)\, m(r)}},$$

$\beta$ étant arbitrairement petit. En sacrifiant une certaine précision, on pourrait remplacer ces inégalités par les suivantes :

$$e^{e^{[m(r)]^{1-\beta}}} < \max |\zeta'(z)| < e^{e^{[m(r)]^{1+\beta}}},$$

pour avoir une analogie plus parfaite avec les propriétés des fonctions de la classe I.

Il y a lieu de poursuivre cette recherche de transcendantes non algébroïdes présentant des propriétés de plus en plus éloignées de celles auxquelles nous sommes habitués par les transcendantes élémentaires, mais l'avancement à des classes supérieures demanderait des développements compliqués que je laisse pour un autre travail.

### Autres transcendantes de la classe II.

**12**. Les fonctions $\zeta(z)$, que nous avons envisagées plus haut, ont l'inconvénient de n'être pas finies à distance finie; or, nous pouvons les remplacer par d'autres dépourvues de ce défaut et ayant des pro-

priétés analogues de croissance. A cet effet, remarquons que les zéros de $\varphi(z)$, qui coïncident avec les infinis de $\zeta(z)$, ne peuvent être que des points algébriques de $\varphi(z)$, puisque cette fonction, étant le logarithme d'une algébroïde n'admettant aucun zéro et aucun infini, n'a pas des singularités transcendantes; nous pouvons donc, d'après le résultat du n° **2**, former une algébroïde $\mathrm{a}(z)$ admettant comme zéros ces points avec les mêmes degrés de multiplicité que $\varphi(z)$ et mettre $\varphi(z)$ sous la forme

$$\varphi(z) = \mathrm{a}(z)\, e^{\sigma(z)}.$$

Or, les zéros de $\varphi(z)$ satisfont à l'équation $F(z) - \alpha = 1$, puisque nous maintenons l'hypothèse que $F(z)$ soit de la classe exponentielle [1], hypothèse qui entraîne les relations

$$f(z) = 1, \qquad F(z) - \alpha = e^{\varphi(z)}.$$

Si donc l'algébroïde primitive $F(z)$ est choisie de façon que la densité des zéros de l'équation

$$F(z) = \alpha + 1$$

soit convenablement exceptionnelle, nous pouvons toujours nous arranger de sorte que l'algébroïde $\mathrm{a}(z)$ ne croisse pas plus vite que $\mu(r)$; il en sera alors de même de $e^{\sigma z}$, ce que nous poursuivons. Mais laissons ces généralités et rappelons-nous que l'algébroïde $F(z)$ doit appartenir à la classe exponentielle, si l'on veut que la fonction $\varphi(z)$ croisse comme $\mu(r)$ d'une façon certaine; cette propriété de $F(z)$, d'appartenir à la classe exponentielle, sera réalisée, si $F(z)$ admet $n$ valeurs exceptionnelles $\alpha_i$, telles que les fonctions

$$F(z) - \alpha, \quad F(z) - \alpha_1, \quad F(z) - \alpha_2, \quad \ldots, \quad F(z) - \alpha_{n-1}$$

n'admettent aucun zéro; la résolution, en effet, des équations correspondantes par rapport aux coefficients $B_i(z)$ (*voir* les formules du n° **6**)

---

[1] Et nous voulons qu'il en soit de même de l'algébroïde $\dfrac{F(z) - \alpha}{f(z)}$.

montre qu'ils auraient la forme qui caractérise la classe exponentielle.

Ici notre but exige que la valeur exceptionnelle $\alpha_1$ soit égale à $\alpha + 1$. Cela posé, la fonction $\varphi(z)$ n'admettra aucun zéro et l'on aura $a(z) = 1$; dès lors, $\sigma(z)$ sera toujours finie à distance finie et, si nous posons

$$\sigma(z) = \sigma_1(z) + i\sigma_2(z),$$

sa partie réelle $\sigma_1(z)$ croîtra comme $m(r) = \log \mu(r)$ avec le sens indiqué dans le Chapitre précédent. Ainsi, en spécifiant davantage l'algébroïde primitive $F(z)$ en ce qui concerne ses valeurs exceptionnelles, nous obtenons le résultat désiré : *la fonction $\zeta(z)$ du Chapitre précédent devient une fonction $\sigma(z)$ toujours finie à distance finie.* La fonction $\sigma(z)$ jouit absolument des mêmes propriétés de croissance que $\zeta(z)$, ayant, en outre, l'avantage d'être toujours finie à distance finie; les raisonnements seront identiques à ceux du n° **10**.

**15.** Tous ces résultats peuvent, dans une certaine mesure, être étendus à des fonctions $F(z) - e^{h(z)}$, $h(z)$ étant une fonction entière; si, en effet, $F(z)$ est de la classe exceptionnelle, il en est de même de $F(z) - e^{h(z)}$.

On peut même les étendre aux fonctions $F(z) - E(z)$, $E(z)$ désignant une algébroïde de la classe exponentielle d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$. La différence $F(z) - E(z)$ sera, en effet, elle-même de la classe exponentielle; supposons, en effet, que $u = F(z)$ satisfasse à l'équation

$$(16) \qquad \Psi(z, u) = 0$$

et que $E(z)$ satisfasse à l'équation

$$(17) \qquad \Sigma(z, E) = 0,$$

et faisons dans la première la substitution $u = E + F_1$, ou bien $u = E + u_1$, qui nous conduira à l'équation

$$(18) \qquad \Psi_1(z, E, u_1) = 0,$$

dont les coefficients seront de la forme qui caractérise la classe exponentielle.

L'équation (18) ne définissant pas $u_1$ comme fonction de $z$ seulement, nous éliminons la variable E entre les équations (17) et (18) et nous sommes conduits à une équation

$$\Phi(z, u_1) = 0,$$

dont les coefficients sont, eux aussi, de la forme caractérisant la classe exponentielle. La différence $u_1 = u - E(z)$ sera donc aussi de la classe exponentielle; on se rend aisément compte de tout cela en se reportant au mode de l'élimination. On arrive, d'ailleurs, au même résultat par l'application de la propriété des arguments, utilisée dans l'étude des propriétés des fonctions de la classe I directement sur la relation $u = E + u_1$; il n'y a qu'à remarquer que l'argument de $u_1$ ne saurait avoir un ordre de grandeur supérieur à celui des arguments des fonctions $u = F(z)$ et $E(z)$ qui satisfont aux inégalités

$$\arg. F(z) < [\mu(r)]^{1+\beta}, \qquad \arg. E(z) < [\mu(r)]^{1+\beta},$$

$\beta$ étant arbitrairement petit, parce que les fonctions $F(z)$ et $E(z)$ sont, toutes les deux, de la classe exponentielle et d'ordre non supérieur à $e^{\mu(r)}$; nous entendons par là qu'il n'y a pas de nombre $p$, tel que l'on ait

$$\max. |F(z)| > e^{[\mu(r)]^{1+p}}, \qquad \max. |E(z)| > e^{[\mu(r')]^{1+p}}.$$

Cela posé, s'il y a deux algébroïdes $E_1$ et $E_2(z)$ de la classe exponentielle et d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$ telles que, en posant

$$F(z) - E_1(z) = e^{\varphi_1(z)}, \qquad F(z) - E_2(z) = e^{\varphi_2(z)},$$
$$\varphi_1(z) = e^{\sigma_1(z)}, \qquad \varphi_2(z) = e^{\sigma_2(z)},$$

les $\varphi'_1(z)$ et $\varphi'_2(z)$ ou bien les $\sigma'_1(z)$ et $\sigma'_2(z)$ croissent moins vite que $e^{\mu(r)}$, une élimination nous conduirait à l'identité

$$E_2(z) - E_1(z) = e^{\varphi_1(z)} - e^{\varphi_2(z)},$$

qui remplit toutes les conditions nécessaires [1] pour assurer son impossibilité.

*Il n'existe donc pas plus d'une fonction algébroïde* E($z$) *de la nature ci-dessus indiquée, telle que les fonctions* $\varphi'(z)$ *et* $\sigma'(z)$ [*ou bien* $\zeta'(z)$] *correspondantes croissent moins vite que* $e^{\mu r}$. *Nous avons donc encore un cas d'exception unique.*

De ce théorème découlent, par des raisonnements identiques à ceux des numéros précédents, les propriétés de croissance dont jouissent la partie réelle et la partie imaginaire des fonctions $\sigma(z)$ et $\zeta(z)$, lorsque l'on ne se trouve pas dans le cas d'exception unique.

## Uniformité des résultats précédents. — Un théorème général et simple.

**14.** Tous les théorèmes de ce travail et du Mémoire précédent mettent en lumière l'origine profonde du *cas d'exception unique de M. Picard*, à laquelle nous devons nous reporter quand nous voulons en faire l'extension aux algébroïdes multiformes. Ce cas d'exception *unique*, qui est, au fond, une propriété de croissance des fonctions $\varphi(z)$, $\zeta(z)$ et $\sigma(z)$, étudiées dans ce travail, se réduit, quand on se borne aux algébroïdes uniformes, à un abaissement de la densité des zéros et des infinis. Dans des travaux antérieurs [*voir*, par exemple, notre Thèse [2] plus haut citée], en étudiant les algébroïdes multiformes, nous ne nous sommes attaché qu'à cette densité des zéros et des infinis, et cela n'a pu nous fournir un cas d'exception unique; nous en avons eu plusieurs, en général, et leur nombre maximum dépend du nombre des branches de l'algébroïde.

---

(1) Elle remplit toutes les conditions nécessaires, puisque sa dérivation la ramène à une autre de la même forme avec des coefficients algébroïdes d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu r}$.

(2) *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes* (Paris, Gauthier-Villars, 1905 et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*).

Remarquons encore que les théorèmes, établis dans ce travail et le précédent, qui comprennent comme cas particulier le théorème classique de M. Picard et ses généralisations concernant les algébroïdes uniformes, peuvent être énoncés sous une forme sommaire et simple comme une propriété de la dérivée logarithmique de la fonction $F(z)-\alpha$ ou bien $F(z)-E(z)$, $E(z)$ désignant une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à celui de $e^{\mu(r)}$ : il n'est pas, en effet, difficile de voir que le cas d'exception unique que comportent les théorèmes en question se caractérise toujours par la croissance de la dérivée logarithmique de $F(z)-\alpha$ ou $F(z)-E(z)$, dont l'ordre de grandeur est inférieur à celui de $F(z)$ lorsque l'on se trouve dans le cas d'exception unique; on s'en rend aisément compte en remarquant que, dans le cas d'exception, nous avons

$$F(z)-\alpha=f(z)e^{\varphi(z)} \quad \text{ou bien} \quad F(z)-E(z)=F_1(z)e^{\Lambda(z)},$$

les fonctions $f(z)$ et $F_1(z)$ étant des algébroïdes d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$ et $\varphi(z)$ et $\Lambda(z)$ toujours finies à distance finie. Nous avons encore, grâce à notre hypothèse,

$$F'(z)=[f'(z)+f(z)\varphi'(z)]e^{\varphi(z)},$$
$$F'(z)-E'(z)=[F'_1(z)+F_1(z)\Lambda'(z)]e^{\Lambda(z)},$$

les coefficients des exponentielles étant aussi des algébroïdes d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$. Il en résulte que les dérivées logarithmiques

$$\frac{F'(z)}{F(z)-\alpha}, \qquad \frac{F'(z)-E'(z)}{F(z)-E(z)}$$

sont aussi d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$, d'après la définition et les propriétés de l'ordre de grandeur des algébroïdes non entières.

Inversement, nous pouvons démontrer que, si la dérivée logarithmique de $F(z)-\alpha$ jouit de cette propriété, nous nous trouvons bien dans le cas d'exception unique.

Supposons, en effet, que l'on ait

$$\frac{F'(z)}{F(z)-\alpha}=\omega(z),$$

$\omega(z)$ étant une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$; l'intégration nous donnera

$$\log[F(z) - \alpha] = c + \int \omega(z)\,dz$$

ou

$$F(z) - \alpha = K e^{\int\omega(z)dz} \qquad [K = e^c],$$

K étant une constante. Les zéros et les infinis du second membre coïncident avec les infinis de l'exposant $\int\omega(z)\,dz$ et, par conséquent, avec les infinis de l'algébroïde $\omega(z)$, dont la densité est exceptionnelle pour un ordre de grandeur égal à $e^{\mu(r)}$ (c'est-à-dire, elle est inférieure à celle que le théorème de M. Hadamard, précisé par M. Borel, fait correspondre à un ordre de grandeur égal à $e^{\mu(r)}$], puisque cette fonction est supposée d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$.

La densité, donc, des zéros et des infinis de $F(z) - \alpha$ est bien exceptionnelle et nous aurons

$$F(z) - \alpha = f(z)\,e^{\varphi(z)},$$

$f(z)$ étant une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$ [$f(z)$ n'est qu'un produit canonique (multiforme, *voir* le n° 2) de facteurs primaires analogue à celui qui est formé par les infinis de $\omega(z)$, qui sont nécessairement simples] et $\varphi(z)$ toujours finie à distance finie. Il en résulte

$$\frac{F'(z)}{F(z)-\alpha} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \varphi'(z) \qquad \text{et} \qquad \varphi'(z) = \frac{F'(z)}{F(z)-\alpha} - \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Les deux dérivées logarithmiques du second membre ayant, par hypothèse, leur ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$, il en sera de même de $\varphi'(z)$; nous obtenons donc ainsi toutes les conditions qui caractérisent le cas d'exception unique et entraînent les propriétés de croissance des fonctions $\varphi(z)$, $\zeta(z)$ et $\sigma(z)$ signalées dans ce travail. Nous avons donc le théorème général suivant :

Théorème V. — *La dérivée logarithmique de* $F(z) - \alpha$ *ne saurait croître moins vite que* $F(z)$ *pour plus d'une valeur de* $\alpha$.

Il en est bien de même de la fonction $F(z) - E(z)$.

Je crois utile de répéter ici que j'emploie l'ordre de grandeur de M. Borel, d'après lequel une fonction croissante $m(r)$ est d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$, lorsque l'on a l'inégalité

$$m(r) < e^{[\mu(r)]^{1-p}},$$

$p$ étant un nombre positif quelconque.

Pour fixer les idées, je n'utilise pas dans ce travail les précisions d'ordre données récemment par quelques auteurs (Lindelöf, Boutroux, Maillet).

On obtient le sens de l'ordre de grandeur d'une algébroïde non entière à l'aide de l'exclusion du voisinage immédiat de ses infinis.

La démonstration de ce théorème peut se faire aussi directement de la façon suivante : supposons que, pour deux valeurs $\alpha_1$ et $\alpha_2$, l'on ait

$$\mathrm{F}(z) - \alpha_1 = \mathrm{F}(z)\, q_1(z), \qquad \mathrm{F}'(z) - \alpha_2 = \mathrm{F}(z)\, q_2(z),$$

les algébroïdes $q_1(z)$ et $q_2(z)$ étant d'ordre de grandeur inférieur à celui de $\mathrm{F}(z)$; l'élimination de $\mathrm{F}'(z)$ entre ces deux relations nous fournirait l'identité suivante :

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \mathrm{F}(z)[q_1(z) - q_2(z)],$$

ce qui entraîne immédiatement

$$\alpha_1 = \alpha_2 \qquad \text{et} \qquad q_1(z) = q_2(z),$$

grâce aux propriétés générales des algébroïdes établies dans notre Mémoire précédent.

Il en est de même de la fonction $\mathrm{F}(z) - \mathrm{E}(z)$, $\mathrm{E}(z)$ étant une algébroïde croissant moins vite que $e^{\mu(r)}$ dans le sens plusieurs fois indiqué.

**15.** Remarquons maintenant que ce dernier mode de démonstration du théorème ci-dessus énoncé suggère plusieurs généralisations intéressantes pour la théorie des équations différentielles. Considérons

une équation différentielle

$$(19) \qquad \Sigma(z, y, y', \alpha) = 0,$$

la fonction $\Sigma(z, y, y', \alpha)$ étant algébrique en $y$, $y'$ et $\alpha$ et transcendante algébroïde par rapport à $z$ d'ordre de grandeur égal à $e^{\mu(r)}$ (j'entends par là que le plus grand des ordres de grandeur des divers coefficients est égal à $e^{\mu(r)}$). Envisageons deux valeurs $\alpha_1$ et $\alpha_2$ de la variable $\alpha$, qui est considérée ici comme un paramètre, et cherchons l'intégrale commune des équations différentielles

$$\Sigma(y, y', z, \alpha) = 0, \qquad \Sigma(y, y', z, \alpha_2) = 0.$$

L'élimination de $y'$ entre ces équations nous conduit à une équation

$$L(y, z, \alpha_1, \alpha_2) = 0,$$

algébrique en $y$, $\alpha_1$ et $\alpha_2$, qui exprime que l'intégrale commune est une fonction algébroïde d'ordre de grandeur égal, en général, à $e^{\mu(r)}$; elle peut être aussi d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$ pour des valeurs de $\alpha_1$ et $\alpha_2$ satisfaisant à des équations algébriques en $\alpha_1$ et $\alpha_2$.

Appelons $E_i$ l'équation différentielle de la famille définie par l'équation (19) correspondante à la valeur $\alpha_i$ de $\alpha$ et remarquons que les considérations précédentes nous conduisent à la conclusion suivante :

*Étant donnée une équation différentielle* $E_1$ *de la famille considérée* (19), *il n'y a qu'un nombre fini d'autres équations de la même famille admettant une intégrale commune avec l'équation* $E_1$ *d'ordre de grandeur inférieur à* $e^{\mu(r)}$.

Nous citons ce résultat comme un exemple de problèmes basés sur les mêmes principes que celui qui se rattache au théorème de M. Picard, dont toutes les généralisations et extensions aux algébroïdes multiformes (*avec un cas d'exception unique*) ont été résumées par le théorème du numéro précédent. Il est vrai que ce théorème se ramène à l'équation

$$F'(z) - \alpha = F(z)\, q_\alpha(z) \qquad \text{ou} \qquad y' - \alpha = y\, q_\alpha(z)$$

écrite plus haut, qui n'est pas, en général, algébrique en $\alpha$, puisque le facteur $q_\alpha(z)$ dépend aussi de $\alpha$ d'une façon dont la complication est tout à fait imprévue; mais il arrive ici que les conditions exigées par le cas d'exception se décomposent en deux équations, dont l'une est *algébrique* en $\alpha_1$ et $\alpha_2$ ne contenant pas la variable $z$. Le théorème général que nous venons d'énoncer dans ce numéro comporte, en général, plusieurs cas d'exception, mais toujours en nombre *fini*.

Il y aurait une foule de problèmes analogues à celui que nous avons traité dans ce numéro, dont l'étude nous entraînerait très loin; c'est pour cela que je n'y insiste pas.

# *Sur les fractions continues arithmétiques et les nombres transcendants;*

PAR M. EDMOND MAILLET.

## I. — Introduction.

Soit la fraction continue

$$A = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \dots,$$

où $a_0, a_1, a_2, \dots$ sont des nombres quelconques $> 0$.

Si l'on prend pour ces nombres des entiers positifs, A est une fraction continue arithmétique *ordinaire :* 1° Liouville a indiqué des cas étendus où A est un nombre transcendant : ces nombres où, pour une infinité de valeurs de $j$, $a_j$ croît assez vite avec $j$, sont les *nombres transcendants de Liouville;* 2° les nombres A sont encore transcendants quand ce sont des fractions continues quasi-périodiques, sous certaines conditions.

On peut se demander si certaines propriétés analogues ne pourraient subsister lorsque les $a_j$ ne sont pas des entiers positifs. Soit $a_j = b_j c_j^{-1}$, où $b_j$, $c_j$ sont entiers positifs,

$$J = b_0 c_0^{-1} + 1 : b_1 c_1^{-1} + 1 : b_2 c_2^{-1} + \dots.$$

Dans ce qui suit [1], j'établis diverses conditions suffisantes pour qu'une pareille fraction continue soit un nombre transcendant de Liouville, et j'indique, avec précision, des cas étendus où l'une au moins de ces conditions est satisfaite. Ainsi, les $c_n$ étant donnés, J est un nombre de Liouville lorsque la croissance des $b_n$ est suffisamment rapide avec $n$, ou que l'ordre de la suite des $b_n$ est assez grand (théorèmes I à V).

La considération des fractions continues J divergentes peut aussi conduire à des nombres transcendants de Liouville (théorème VI).

Dans des cas étendus, les fractions continues J quasi-périodiques sont des nombres transcendants; même, sous certaines conditions, le développement en fraction continue ordinaire (c'est-à-dire à quotients incomplets entiers positifs) de ces nombres J est quasi-périodique (théorèmes VII et VIII et corollaires).

Enfin, je m'occupe un peu des fractions continues

$$K = g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 + \ldots,$$

où les $g_i$, $h_i$ sont des entiers positifs pour $i > 0$ ($g_0$ rationnel), et qui se ramènent facilement au type J. Dans des cas étendus, que je précise, ce sont des nombres de Liouville (théorème IX et X); quand K est quasi-périodique, les périodes ayant un nombre impair de termes, la fraction J correspondante est aussi quasi-périodique dans des cas étendus.

## II. — Préliminaires.

Soient $a_n > 0$, $b_n$, $c_n$ quelconques $> 0$, entiers ou non. Je rappelle d'abord quelques propriétés connues des fractions continues J et de leurs *pseudo-réduites* [2]

$$J_n = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots + 1 : a_n.$$

---

[1] Je désignerai dans ce Mémoire par *I. T.* mon *Introduction à la théorie des nombres transcendants*, etc. (Paris, Gauthier-Villars, 1906), à laquelle je ferai de fréquents renvois. *Voir* un résumé de mon Travail dans les *C. R.*, t. CXLIV, 1er sem. 1907, p. 1020, 13 mai.

[2] Je réserve le mot *réduite* pour le développement en fraction continue ordinaire à quotients incomplets entiers positifs de J. J'adopte l'expression de *pseudo-réduite* pour bien montrer que, en général, malgré l'apparence, les frac-

Elles s'établissent comme les propriétés analogues pour le cas où les $a_n$ sont entiers (*I. T.*, p. 1 à 5), en supposant, bien entendu, la fraction continue convergente [1], ce qui a toujours lieu quand les $a_n$ sont $\geqq 1$ dès que $n$ est assez grand. Posant

$$(1)\quad \begin{cases} P'_{n+1} = P'_n a_{n+1} + P'_{n-1}, \qquad Q'_{n+1} = Q'_n a_{n+1} + Q'_{n-1}, \\ P'_0 = a_0, \quad Q'_0 = 1, \quad P'_1 = a_0 a_1 + 1, \quad Q'_1 = a_1, \quad \text{etc.}, \\ x_{n+1} = a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \ldots, \end{cases}$$

on a

$$(2)\qquad J_n = P'_n Q'^{-1}_n, \qquad P'_{n+1} Q'_n - P'_n Q'_{n+1} = (-1)^n,$$

$$J = \frac{P'_n x_{n+1} + P'_{n-1}}{Q'_n x_{n+1} + Q'_{n-1}},$$

$$x_{n+1}\frac{Q'_n}{Q'_{n-1}} = \frac{J_{n-1} - J}{J - J_n} = x_{n+1}\left(a_n + \frac{Q'_{n-2}}{Q'_{n-1}}\right) > 0;$$

J est compris entre $J_{n-1}$ et $J_n$, $J - J_n$ du signe de $J_{n+1} - J_n$, et

$$(3)\qquad |J - J_n| < |J_{n+1} - J_n| = (Q'_n Q'_{n+1})^{-1};$$

quand $a_n a_{n+1} \geqq 1$.

$$(4)\qquad |J - J_n| < |J - J_{n-1}|;$$

c'est le cas, à partir d'une certaine valeur de $n$, lorsque $a_n \geqq 1$ à partir de cette valeur. De même

$$(5)\quad J_{n+1} - J_n = (-1)^n (Q'_n Q'_{n+1})^{-1}, \quad J_n - J_{n-1} = (-1)^{n-1} (Q'_{n-1} Q'_n)^{-1},$$

$$(6)\quad \begin{cases} J_{n+1} - J_{n-1} = (-1)^{n-1} [(Q'_{n-1} Q'_n)^{-1} - (Q'_n Q'_{n+1})^{-1}] \\ \qquad = (-1)^{n-1} (Q'_{n-1} Q'_n Q'_{n+1})^{-1} (Q'_{n+1} - Q'_{n-1}) \\ \qquad = (-1)^{n-1} a_{n+1} (Q'_{n-1} Q'_{n+1})^{-1}. \end{cases}$$

---

tions $J_n$ pourront avoir, au point de vue arithmétique, des propriétés sensiblement différentes de celles des réduites.

[1] On sait qu'il faut et il suffit que la série $\sum_1^\infty a_i$ diverge. *Voir* une démonstration simple de cette propriété due, je crois, à Stern (*J. f. Math.*, t. XXXVII) dans Stieltjes (*Ann. Fac. Toul.*, t. VIII, 1894, *J.*, p. 31).

La suite des quantités $J_1, J_3, \ldots, J_{2p+1}, \ldots$ forme donc une suite décroissante, la suite des quantités $J_0 = a_0, J_2, \ldots, J_{2p}, \ldots$ une suite croissante; toutes deux ont pour limite J quand la fraction continue est convergente.

On voit que $P'_n$ et $Q'_n$ sont des polynomes à coefficients entiers formés avec $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, du premier degré par rapport à chacun des $a_i$. On peut encore écrire

$$(7) \quad \varpi'_n = c_0 c_1 \ldots c_n P'_n, \quad \chi'_n = c_0 c_1 \ldots c_n Q'_n, \quad J_n = P'_n Q'^{-1}_n = \varpi'_n \chi'^{-1}_n,$$

où $\varpi'_n, \chi'_n$ sont des polynomes à coefficients entiers formés avec $b_0, \ldots, b_n, c_0, \ldots, c_n$,

$$(8) \qquad \varpi'_{n+1}\chi'_n - \varpi'_n\chi'_{n+1} = (-1)^n (c_0 \ldots c_n)^2 c_{n+1},$$

$$(9) \qquad |J - J_n| < (Q'_n Q'_{n+1})^{-1} < (\chi'_n \chi'_{n+1})^{-1} (c_0 \ldots c_n)^2 c_{n+1}.$$

J'évalue les limites supérieures et inférieures de $Q'_n$ et $\chi'_n$ : (1) donne encore

$$(9\,bis) \quad \begin{cases} Q'_n = Q'_{n-1} a_n + Q'_{n-2} > Q'_{n-1} a_n > \ldots > a_1 a_2 \ldots a_n, \\ \chi'_n > c_0 c_1 \ldots c_n a_1 a_2 \ldots a_n > c_0 b_1 b_2 \ldots b_n. \end{cases}$$

D'autre part,

$$Q'_0 = 1, \qquad Q_1 < 1 + a_1;$$

si $Q'_0, Q'_1, \ldots, Q'_n$ sont plus petits que $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)$,

$$Q'_{n+1} = Q'_n a_{n+1} + Q'_{n-1} < (1+a_1)\ldots(1+a_n)(1+a_{n+1}).$$

On a donc

$$(10) \qquad \begin{cases} (1+a_1)\ldots(1+a_n) > Q'_n > a_1 a_2 \ldots a_n, \\ c_0(b_1 + c_1)\ldots(b_n + c_n) > \chi'_n > c_0 b_1 \ldots b_n. \end{cases}$$

Ces formules supposent seulement $a_n > 0$, $a_n$, $b_n$, $c_n$ étant rationnels ou non; lorsque les $b_n$ et les $c_n$ sont des entiers, les $\chi_n$ et les $\varpi'_n$ sont des entiers, et J, supposée convergente, est limite de la suite des fractions $J_n = \varpi'_n \chi'^{-1}_n$. On remarquera que toutes les formules ci-dessus obtenues sans considérer $x_{n+1}$ subsistent quand J diverge.

Enfin, lorsque $a_n$ est $= 1$ à partir d'une certaine valeur de $n$, je rappelle que (*I. T.*, p. 3),

$$(10\ bis)\qquad Q'_n > 2^{\frac{n-\nu}{2}},$$

où $\nu$ est fini.

## II. — Sur les nombres de Liouville de la forme J.

Je suppose les $b_n$, $c_n$ entiers réels et positifs.

Par définition, un nombre de Liouville réel A est la limite d'une suite de fractions rationnelles $A_n = B_n C_n^{-1}$ ($B_n$, $C_n$ entiers positifs, premiers entre eux ou non) telles que, pour une infinité de valeurs $n_1$ de $n$,

$$(11)\qquad 0 < |A - A_{n_1}| < C_{n_1}^{-\alpha},$$

si grand que soit le nombre positif $\alpha$, les $C_{n_1}$ n'ayant aucune limite supérieure quand $n_1$ croît indéfiniment : c'est ce que j'appellerai *la condition de Liouville* [1]. Il en résulte qu'on peut choisir les $n_1$ de façon que $C_{n_1}$ ne décroisse pas quand $n_1$ croît, et que, pour $\alpha$ et $n_1$ assez grands, $A_{n_1}$ est une réduite de A (*I. T.*, p. 5, prop. 8).

Dès lors, étant donnée une quantité réelle positive A′, qu'on sait seulement être limite d'une suite de fractions rationnelles

$$A'_n = B'_n C'^{-1}_n \qquad (B'_n,\ C'_n \text{ entiers}),$$

*peut-on écrire une condition nécessaire pour que A′ soit un nombre de Liouville?*

Si l'on sait que la suite des $A'_n$ renferme toutes les réduites, sauf un nombre fini d'entre elles, on devra exprimer que parmi les $A'_n$ il y en a une infinité qui satisfont à la condition de Liouville, ce qui sera nécessaire et suffisant. Mais il est toujours possible de définir un

---

[1] Ce m'est une occasion de mentionner, pour éviter toute possibilité de confusion, et bien que cela résulte sans aucun doute, me semble-t-il, de mes calculs, que les réduites envisagées dans l'énoncé du bas de la page 44 de *I. T.* sont exclusivement des réduites satisfaisant à la condition de Liouville.

nombre quelconque A′ comme limite d'une suite de quantités $A'_n$ dont aucune n'est réduite. Par conséquent, *a priori*, dans le cas de la suite la plus générale $A'_n$, on n'a aucun moyen d'écrire une condition nécessaire pour que A soit un nombre de Liouville : il en est tout différemment quand A est donné par la suite de ses réduites (*I. T.*, p. 229). Aussi n'essaierai-je pas d'indiquer en général pour J une pareille condition nécessaire, car rien ne prouve *a priori* que, parmi les $J_n$, il y a toutes les réduites de J, sauf un nombre limité.

On peut toutefois écrire une condition suffisante pour que les $J_n$ renferment une infinité de réduites. Il suffit, d'après (9), que, pour une infinité de valeurs $n_1$ de $n$ (*I. T.*, p. 5),

$$|J - J_{n_1}| < \frac{(c_0, \ldots c_{n_1})^2 c_{n_1+1}}{\chi'_{n_1}\chi'_{n_1+1}} < (2\chi'^2_{n_1})^{-1},$$

ou

$$(12) \qquad \chi'_{n_1+1} > 2\chi'_{n_1}(c_0 \ldots c_{n_1})^2 c_{n_1+1}.$$

Mais, même quand cette condition est satisfaite, on ne sait toujours pas si la suite $J_n$ renferme toutes les réduites, sauf un nombre limité.

*Peut-on écrire une condition suffisante pour que* J *soit un nombre de Liouville?*

Cette fois *la réponse est affirmative*. Il suffira que, parmi les $J_n$, il y en ait une infinité $J_{n_1}$ qui, non seulement sont réduites, mais encore satisfont à la condition de Liouville. Il suffira donc, d'après (9),

$$|J - J_{n_1}| < (c_0 \ldots c_{n_1})^2 c_{n_1+1} \chi'^{-1}_{n_1} \chi'^{-1}_{n_1+1} < \chi'^{-\alpha}_{n_1},$$

ou

$$(13) \qquad \chi'^{\alpha-1}_{n_1}(c_0 \ldots c_{n_1})^2 c_{n_1+1} < \chi'_{n_1+1}.$$

On déduit de là diverses conditions suffisantes dont je ferai usage : d'après (10), il suffit

$$(14) \quad \begin{cases} c_0 b_1 \ldots b_{n_1+1} > (c_0 \ldots c_{n_1})^2 c_{n_1+1} c_0^{\alpha-1}[(b_1 + c_1)\ldots(b_{n_1} + c_{n_1})]^{\alpha-1}, \\ \text{ou} \\ a_1 \ldots a_{n_1+1} > c_0^{\alpha}[(1 + a_1)\ldots(1 + a_{n_1})]^{\alpha-1}(c_1 \ldots c_{n_1})^{\alpha}, \\ \text{ou} \\ a_{n_1+1} > c_0^{\alpha}[(1 + a_1)\ldots(1 + a_{n_1})]^{\alpha-1}(c_1 \ldots c_{n_1})^{\alpha+1}. \end{cases}$$

Quand $a_i \geqq 1$, d'où $b_i \geqq c_i$, à partir d'une certaine valeur $i'$ de $i$, il suffit

$$c_0 b_1 \ldots b_{n_1+1} > \lambda^\alpha c_0^{\alpha-1} 2^{n_1(\alpha-1)} (b_1 \ldots b_{n_1})^{\alpha-1} (c_0 \ldots c_{n_1})^2 c_{n_1+1},$$

ou

$$(15) \qquad a_{n_1+1} > \lambda^\alpha 2^{n_1(\alpha-1)} (b_1 \ldots b_{n_1})^{\alpha-2} (c_1 \ldots c_{n_1})^2 c_0^\alpha,$$

ou encore

$$(16) \qquad a_{n_1+1} > \lambda^\alpha 2^{n_1(\alpha-1)} (a_1 \ldots a_{n_1})^{\alpha-2} (c_0 \ldots c_{n_1})^\alpha \qquad (\lambda \text{ const.}).$$

On peut en déduire d'autres conditions suffisantes moins précises, mais plus simples.

Dans le cas de (14), soit $d_i$ la plus grande des quantités $b_i$ et $c_i$ : il suffit

$$a_1 \ldots a_{n_1+1} > c_0^\alpha 2^{n_1(\alpha-1)} (d_1 \ldots d_{n_1})^{\alpha-1} (c_1 \ldots c_{n_1}),$$

ou, *a fortiori*,

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 \ldots a_{n_1+1} > c_0^\alpha 2^{n_1(\alpha-1)} (d_1 \ldots d_{n_1})^\alpha, \\ \text{ou} \\ b_{n_1+1} > c_0^\alpha 2^{n_1(\alpha-1)} (d_1 \ldots d_{n_1})^{\alpha+1} c_{n_1+1}. \end{array} \right.$$

Quand $a_i \geqq 1$ $(i \geqq i')$, soit $\alpha_n$ $(n \geqq i')$ la plus grande des quantités $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$; $\beta_n$, $\gamma_n$ les quantités analogues pour les suites $b_1$, ..., $b_n$ d'une part, $c_0, c_1, \ldots, c_n$ d'autre part. On a $\alpha_n \geqq 1$, $\beta_n \geqq \gamma_n$; d'après (15), il suffit

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{n_1+1} > (\lambda c_0)^\alpha 2^{n_1(\alpha-1)} \beta_{n_1}^{n_1(\alpha-2)} \gamma_{n_1}^{2n_1}, \\ \text{ou} \\ a_{n_1+1} > (\lambda c_0)^\alpha (2\beta_{n_1})^{n_1\alpha}; \end{array} \right.$$

d'après (16), il suffit

$$(19) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{n_1+1} > (\lambda c_0)^\alpha 2^{n_1(\alpha-1)} \alpha_{n_1}^{n_1(\alpha-2)} \gamma_{n_1}^{n_1\alpha}, \\ \text{ou} \\ a_{n_1+1} > (\lambda c_0)^\alpha (2\alpha_{n_1}\gamma_{n_1})^{n_1\alpha}. \end{array} \right.$$

Ceci posé, je me reporte aux classifications des fractions continues que j'ai indiquées ailleurs (*I. T.*, p. 8, 219 note [1], 228, 237), et dont je rappelle sommairement les principes généraux. J est d'ordre $(k, \rho)$ *dans la première classification* quand, pour $n > \nu$,

$$(\omega) \qquad a_n < e_k(n)^{\rho+\varepsilon},$$

et, pour une infinité de valeurs $n_2$ de $n$,

$$(\mu) \qquad a_{n_2} > e_k(n_2)^{\rho-\varepsilon},$$

($k$ entier positif ou négatif, $\rho > \varepsilon$, $\varepsilon$ fixe positif aussi petit qu'on veut); il est d'ordre $(k, \rho)$ *dans la deuxième classification* quand on a, au lieu de ces inégalités, les inégalités

$$(\omega') \qquad a_n < e_k(n^{\rho+\varepsilon}),$$

$$(\mu') \qquad a_{n_2} > e_k(n_2^{\rho-\varepsilon})$$

dans les mêmes conditions. Les valeurs $a_{n_2}$ sont *les valeurs principales ou les termes principaux de la suite des* $a_n$, ou encore *les quotients incomplets principaux de* J. Quand on ne peut trouver aucun système de valeurs de $k$ et $\rho$ tel que $(\omega)$, $(\omega')$ aient lieu, la suite est d'ordre $+\infty$; quand il en est ainsi pour $(\mu)$, $(\mu')$, la suite est d'ordre $-\infty$.

I. *Cas où $a_i \geqq 1$ à partir d'une certaine valeur $i'$ de $i$.* — On remarque que, lorsque les $c_i$ sont tous égaux à 1, des inégalités analogues à (15) et (16) ont déjà été indiquées ailleurs (*I. T.*, p. 228 et suiv.), et ne peuvent, comme on sait, avoir lieu, sans restriction sur le mode de croissance des $a_n$, que si la suite des $a_n$ est d'ordre $> (3,0)$ dans la première classification, d'ordre $> (2,1)$ dans la deuxième.

*A fortiori* doit-il en être ainsi quand les $c_i$ ne sont pas tous égaux à 1. De plus ces inégalités n'ont jamais lieu quand la suite des $a_n$ est d'ordre $< (1, \infty)$ dans la première classification, ou d'ordre $< (1,1)$ dans la deuxième.

*Première classification.* — L'ordre des $b_n$, *supposé fini*, est au moins égal à celui des $a_n$ et celui des $c_n$, puisque $b_n \geqq a_n$ et $b_n > c_n$ pour $n$ assez grand.

Je vais d'abord établir le lemme suivant :

Lemme I. — *Dans la première classification, les produits $\lambda_n \mu_n$ des nombres de mêmes indices de deux suites de nombres $\lambda_n, \mu_n$ d'ordres finis $(k, \rho)$, $(k_1, \rho_1)$, avec $(k, \rho) \geqq (k_1, \rho_1)$ et, pour $n$ assez grand, $\lambda_n \geqq 1$, $\mu_n \geqq 1$ : 1° forment une suite d'ordre $(k, \rho)$ lorsque $k > k_1$; 2° forment une suite d'ordre $\geqq (k, \rho)$ et $\leqq (k, \rho + \rho_1)$, lorsque $k = k_1$.*

*Si l'une des deux suites est d'ordre infini, avec, pour $n$ assez grand, $\lambda_n \geqq 1$, $\mu_n \geqq 1$, la suite des $\lambda_n \mu_n$ est d'ordre infini.*

Il suffit de considérer le cas où $(k, \rho) < +\infty$.

L'ordre de la suite $\lambda_n \mu_n$ est évidemment $\geqq (k, \rho)$.

D'autre part, quand $k_1 < k$,

$$\mu_n \leqq e_{k_1}(n)^{\rho_1+\varepsilon} = e_k(n)^{\varepsilon_n}, \qquad \lim \varepsilon_n = 0 \text{ pour } n = 0,$$
$$\lambda_n \leqq e_k(n)^{\rho+\varepsilon}, \qquad \lambda_n \mu_n \leqq e_k(n)^{\rho+2\varepsilon} \quad (n \text{ assez grand}).$$

Quand $k_1 = k$, l'ordre, qui ne peut dépasser $(k, \rho + \rho_1)$, peut être égal à $(k, \rho + \rho_1)$ si les deux suites renferment une infinité de termes principaux de même indice $n_1$, car

$$\lambda_{n_1} \geqq e_k(n_1)^{\rho-\varepsilon}, \quad \mu_{n_1} \geqq e_k(n_1)^{\rho_1-\varepsilon}, \qquad \lambda_{n_1} \mu_{n_1} \geqq e_k(n_1)^{\rho+\rho_1-2\varepsilon}.$$

Mais il peut être aussi égal à $(k, \rho)$ : en effet, soit

$$\lambda_n = e_k(n)^{\rho_n}, \qquad \mu_n = e_k(n)^{\sigma_n};$$

il suffit $\rho_n + \sigma_n < \rho + \varepsilon$; ceci aura lieu par exemple si les termes

$$\lambda_{2p}, \qquad \mu_{2p+1}$$

sont principaux, $\lambda_{2p+1}$ et $\mu_{2p}$ restant finis.

Les modifications du raisonnement relatives aux cas limites où $\rho$ ou $\rho_1$ est nul ou infini ne présentent aucune difficulté spéciale.

C. Q. F. D.

J'applique ce lemme à la suite $b_n = a_n c_n$. On voit que l'on peut distinguer deux cas : ou bien l'ordre des $b_n$ est plus grand que l'ordre des $c_n$; ou bien l'ordre des $b_n$ et $c_n$ est le même, l'ordre des $a_n$ pouvant

être le même, ou être plus petit. Je vais examiner ces deux cas successivement.

Théorème I. — *Soit $(k, \rho)$ l'ordre des $b_n$ avec $(k, \rho) > (3, 0)$, c'est-à-dire $k > 3$, ou $\rho > 0$ avec $k = 3$; quand l'ordre des $c_n$ est $\leqq (k_1, \rho_1) < (k, \rho)$,* J *est un nombre transcendant de Liouville.*

En effet, il suffit, d'après (18), quand $\rho$ est différent de 0 et de $\infty$, la valeur $b_{n_1+1}$ étant principale pour la suite des $b_n$, et $\varepsilon$ fixe assez petit :

$$(20)\qquad e_k(n_1+1)^{\rho-\varepsilon} > (\lambda c_0)^\alpha\, 2^{n_1\alpha} e_k(n_1)^{(\rho+\varepsilon)n_1\alpha} e_{k_1}(n_1+1)^{\rho_1+\varepsilon},$$

dès que $n_1$ est assez grand. Or

$$e_k(n_1+1)^{\rho-\varepsilon} > e_{k_1}(n+1)^{\rho_1+\varepsilon} e_k(n_1+1)^{\varepsilon};$$

il suffit donc de montrer que

$$e_k(n_1+1) > e_k(n_1)^{n_1^2} > e_k(n_1)^{\mu n_1},$$

quel que soit le nombre fixe $\mu > 0$, dès que $n_1$ est assez grand, c'est-à-dire que

$$(20\ bis)\qquad e_{k-1}(n_1+1) > e_{k-1}(n_1)^2 > n_1^2 e_{k-1}(n_1),$$

ou

$$e_{k-2}(n_1+1) > 2\, e_{k-2}(n_1).$$

Ceci a lieu pour $k = 3$; quand $k > 3$, il suffit

$$e_{k-3}(n_1+1) > 2\, e_{k-3}(n_1) > \log 2 + e_{k-3}(n_1),$$

ce qui a lieu pour $k = 4$, etc.

Il y a un cas limite à examiner, celui où $\rho$ est infini [on a $(k', 0) = (k'-1, \infty)$] : alors, si $b_n = e_k(n)^{\rho_n}$, $\rho_n$ n'a aucune limite supérieure quand $n$ croît indéfiniment; on prend pour valeurs princi-

pales de $b_n$ celles pour lesquelles $\rho_n$ est plus grand que $\rho_1 + 2\varepsilon$, $\rho_{n-1}$, $\rho_{n-2}$, ..., et les calculs restent les mêmes. C. Q. F. D.

Théorème II. — *Soit* $(k, \rho)$ *l'ordre commun des* $b_n$ *et des* $c_n$, *et* $(k, \rho) > (3, 0)$; J *est encore un nombre transcendant de Liouville si, à la fois,* $\rho$ *est* $\neq 0$ *et* $\neq \infty$, *et les* $a_n$ *sont d'ordre* $> (k, 0)$.

Les inégalités (18) et (20 *bis*) montrent de suite que, lorsque $k$ est $\neq 0$ et de $\infty$, J est encore un nombre de Liouville si les $a_n$ sont d'ordre au moins égal à $(k, \varepsilon_1)$ ($\varepsilon_1$ positif aussi petit qu'on veut, mais fixe). Toutefois, le cas limite où $\rho = 0$ ou $\infty$ reste un cas douteux que l'on peut, il est vrai, élucider parfois; ainsi, quand on a, dès que $n$ est assez grand, $a_n \geqq c_n^{\varepsilon_2}$, $b_n \geqq c_n^{1+\varepsilon_2}$ ($\varepsilon_2$ comme $\varepsilon_1$), les conditions (19) et (20 *bis*) montrent encore que J est un nombre de Liouville (on prend $\rho = \infty$, et, pour $a_{n_1+1}$, une valeur principale de la suite des $a_n$). On peut alors conclure :

Corollaire I. — *Quand* $a_n \geqq c_n^{\varepsilon_2}$ ($\varepsilon_2$ *fixe, positif, aussi petit qu'on veut, mais fini, n assez grand*), J *est un nombre transcendant de Liouville dès que la suite des* $a_n$ *est d'ordre fini plus grand que* $(3, 0)$.

*Remarque I.* — Il ne faudrait pas croire que les catégories de nombres de Liouville que l'on vient de trouver renferment toutes les catégories des nombres de Liouville possibles : les conditions (18) et (19) permettent de reconnaître le contraire.

Je suppose que, dans (19), à partir d'une certaine valeur de $n$, $\alpha_n \geqq \gamma_n$, l'ordre des $a_n$ étant $(2, \rho) > (2, 0)$, J sera un nombre de Liouville si

$$a_{n_1+1} > (2\alpha_{n_1})^{2n_1\alpha};$$

supposant que $a_{n_1+1}$ soit une valeur principale de la suite des $a_n$,

$$a_{n_1+1} > e_2(n_1+1)^{\rho-\varepsilon};$$

pour que J soit un nombre de Liouville, il suffit

$$e_2(n+1)^{\rho-\varepsilon} > (2\alpha_{n_1})^{2n_1\alpha},$$

$$(\rho - \varepsilon)e^{n_1+1} > 2n_1\alpha \log(2\alpha_{n_1}). \tag{21}$$

La limite supérieure de $\alpha_{n_1}$ ainsi trouvée est évidemment toujours acceptable, c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite de quantités $a_n \geqq 1$, d'ordre $(2, \rho)$ satisfaisant à la condition (21) et de la forme $b_n c_n^{-1}$, $b_n$ étant d'ordre $<(2, \infty)$. En effet, je détermine une suite de quantités $a'_n \geqq 1$ d'ordre $(2, \rho)$ satisfaisant à (21), ce qui est possible; je choisis les $c_n$ entiers $\leqq a'_n$, puis les $b_n$ entiers, de façon que $a'_n \leqq b_n c_n^{-1} \leqq a'_n + 1$, et $a_n = b_n c_n^{-1}$. Alors la suite des $a_n$ est d'ordre $(2, \rho)$ et, d'après le lemme I, les $b_n$ sont d'ordre $<(2, \infty)$. J est un nombre transcendant de Liouville qui ne rentre pas dans les catégories qu'on vient de trouver.

*Remarque II.* — Ce qui précède comporte diverses conséquences intéressantes : on sait que, la suite des $c_n$ étant donnée, tout nombre positif peut se représenter par une fraction continue de la forme J [voir *I. T.*, p. 86, et, plus loin, relations (42), (43)].

Si l'on considère l'ensemble des fractions continues illimitées J pour lesquelles les $c_n$ sont donnés, les $b_n$ prenant toutes les valeurs entières possibles telles que $b_n \geqq c_n$, J est un nombre de Liouville dès que l'ordre des $b_n$ ou celui des $a_n$ est assez grand ([1]). Sous cette forme, on voit que les fractions continues

$$a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots,$$

où les $a_i$ sont positifs et $\geqq 1$, ont une propriété arithmétique commune, que les $a_i$ soient entiers ou non. En particulier :

Corollaire II. — *Quand les $c_n$ sont d'ordre $<(3, 0)$,* J *est toujours un nombre transcendant de Liouville dès que les $a_n$ sont d'ordre $>(3, 0)$.*

*Les $c_n$ étant d'ordre $<(3, 0)$, si* J *n'est pas un nombre de Liouville, les $b_n$ et les $a_n$ sont d'ordre $\leqq(3, 0)$.*

*Deuxième classification.* — Je considère les deux suites de quantités

$$(22) \quad \Lambda_m = e_{k_1-1}(m^{\rho_1-\varepsilon})^{-1} \log a'_m, \qquad C_m = e_{k_1-1}(m^{\rho_1-\varepsilon})^{-1} \log c'_m,$$

---

([1]) On traitera plus loin le cas où les $a_n$, $b_n$ ou $c_n$ peuvent être d'ordre infini.

en supposant l'ordre d'une des deux suites $a'_m$, $c'_m$ plus grand que $(k_1, \rho_1)$ ($\varepsilon$ comme précédemment). Je fais un raisonnement analogue à un raisonnement connu (*I. T.*, p. 238) : je porte en abscisses $m$, en ordonnée la plus grande des deux quantités $A_m$ et $C_m$; j'obtiens des points $P_1$, $P_2$, ... pour lesquels je forme un polygone joignant une infinité de ces points, d'ordonnées constamment croissantes avec $m$, au delà de toute limite, et laissant tous les autres points au-dessous. L'équation $y = \log \varphi_x$ (coordonnées cartésiennes) de ce polygone définit une fonction $\varphi_x$, constamment croissante [1], et telle que

$$A_m \leqq \log \varphi_m, \qquad C_m \leqq \log \varphi_m,$$

$$(23) \quad \log a'_m \leqq e_{k_1-1}(m^{\rho_1-\varepsilon}) \log \varphi_m, \qquad \log c'_m < e_{k_1-1}(m^{\rho_1-\varepsilon}) \log \varphi_m,$$

une de ces inégalités au moins devenant une égalité pour une infinité de valeurs de $m$.

Quand l'ordre des $a'_m$ est plus grand que celui des $c'_m$, supposé plus petit que $+\infty$, cette dernière condition est alors évidemment satisfaite pour la suite des $a'_m$ par une infinité de valeurs $m_1$ de $m$, si l'on choisit l'ordre $(k_1, \rho_1 - \varepsilon)$ fini intermédiaire entre l'ordre des $a'_m$ et celui des $c'_m$; alors, en effet, $C_m$ est $< 1$ pour $m$ assez grand. On a même, quand $(k_1, \rho_1) > (1, 0)$, $C_m$ aussi petit qu'on veut pour les valeurs $m_1$ de $m$ en question. En effet,

$$\log c'_m = e_{k_1-1}(m^{\rho_1-2\varepsilon}),$$

$$e_{k_1-1}(m^{\rho_1-\varepsilon}) > \omega\, e_{k_1-1}(m^{\rho_1-2\varepsilon}),$$

si grand que soit $\omega$, dès que $m$ est assez grand et $(k_1, \rho_1) > (1, 0)$; car ceci a lieu pour $k_1 = 1$; pour $k_1 > 1$, il suffit

$$e_{k_1-2}(m^{\rho_1-\varepsilon}) > \omega\, e_{k_1-2}(m^{\rho-2\varepsilon}) > \log \omega + e_{k_1-2}(m^{\rho-2\varepsilon}),$$

ce qui a lieu pour $k_1 = 2$, .... Dans ce cas,

$$(24) \quad \log(a'_{m_1} c'^{\,-1}_{m_1}) = (A_{m_1} - C_{m_1})\, e_{k_1-1}(m_1^{\rho_1-\varepsilon}) \geqq \tfrac{1}{2} A_{m_1} e_{k_1-1}(m_1^{\rho_1-\varepsilon}) = \tfrac{1}{2} \log a'_{m_1}.$$

---

[1] La méthode indiquée pour deux suites de quantités s'étend évidemment à un nombre quelconque.

On pourra d'ailleurs, dans tous les cas, que l'ordre des $a'_m$ soit ou non infini, pour tenir compte éventuellement de l'irrégularité de la croissance des $a'_m$ et des $c'_m$, dire *provisoirement* que l'*ordre des $a'_m$ est au moins égal à celui des $c'_m$ pour une infinité de valeurs $m_1$ de $m$* quand la première inégalité (23) devient une égalité pour les valeurs $m_1$.

Ceci posé, soient $a_n$, $b_n$, $c_n$ d'ordres plus petits que $+\infty$. J'établis ce lemme, analogue au lemme I :

Lemme II. — *Dans la deuxième classification, les produits $\lambda_n\mu_n$ des nombres de même indice de deux suites de nombres $\lambda_n$, $\mu_n$ d'ordres $(k, \rho)$, $(k_2, \rho_2)$ plus petits que $+\infty$, avec $(k, \rho) \geqq (k_2, \rho_2)$ et, pour $n$ assez grand, $\lambda_n \geqq 1$, $\mu_n \geqq 1$ :* 1° *forment une suite d'ordre $(k, \rho)$ lorsque $(k, \rho) \geqq (1, 0)$;* 2° *forment une suite d'ordre $\geqq (k, \rho)$ et $< (0, \infty)$ lorsque $(k, \rho) < (0, \infty)$, d'ordre $(0, \rho)$ quand $k = 0$, $k_2 < 0$, d'ordre $\leqq (0, \rho + \rho_2)$ quand $k = k_2 = 0$* [1].

D'abord l'ordre de la suite des $\lambda_n\mu_n$ est $\geqq (k, \rho)$.

D'autre part, soit $(k, \rho) \geqq (1, 0)$ : pour $n$ assez grand,

$$\lambda_n\mu_n \leqq e_k(n^{\rho+\varepsilon})\, e_{k_2}(n^{\rho_2+\varepsilon}) \leqq e_k(n^{\rho+\varepsilon})^2 \leqq e_k(n^{\rho+2\varepsilon}),$$

car il suffit pour que ceci ait lieu, quand $k = 1$,

$$e^{2n^{\rho+\varepsilon}} \leqq e^{n^{\rho+2\varepsilon}},$$

et, quand $k > 1$,

$$2e_{k-1}(n^{\rho+\varepsilon}) \leqq e_{k-1}(n^{\rho+2\varepsilon});$$

ceci est vrai pour $k = 2$ et, lorsque $k > 2$, exige seulement

$$\log 2 + e_{k-2}(n^{\rho+\varepsilon}) \leqq 2e_{k-2}(n^{\rho+\varepsilon}) \leqq e_{k-2}(n^{\rho+2\varepsilon}), \qquad \dots.$$

La suite des $\lambda_n\mu_n$ est d'ordre $(k, \rho)$ [2].

---

[1] Lorsque l'une des deux suites $\lambda_n$, $\mu_n$ est d'ordre infini, la suite des $\lambda_n\mu_n$ est évidemment d'ordre infini.

[2] Je rappelle que l'on a $(k, 0) = (k-1, \infty)$ (*I. T.*, p. 10 et note II).

Soit maintenant $k=0$, $(k, \rho)<(0, \infty)$ :

$$\lambda_n \mu_n \leqq e_{k_2}(n^{\rho_2+\varepsilon}) n^{\rho+\varepsilon}.$$

Si $k_2<0$,

$$e_{k_2}(n^{\rho_2+\varepsilon})<n^{\varepsilon}, \qquad \lambda_n \mu_n \leqq n^{\rho+2\varepsilon};$$

si $k_2=0$,

$$\lambda_n \mu_n \leqq n^{\rho+\rho_2+2\varepsilon}.$$

Enfin, quand $(k, \rho)$ et $(k_2, \rho_2)$ sont quelconques, mais $<(0, \infty)$, l'ordre des $\lambda_n \mu_n$ est $<(0, \infty)$. C. Q. F. D.

J'applique ceci à la suite $b_n=a_n c_n$, en supposant les $a_n$, par suite les $b_n$, d'ordre $\geqq(2, 1)$. On peut encore, comme pour la première classification, distinguer deux cas : ou bien l'ordre des $b_n$ est plus grand que celui des $c_n$; ou bien l'ordre des $b_n$ est le même que celui des $c_n$, l'ordre des $a_n$ pouvant être le même ou être plus petit. Je traiterai seulement le premier cas.

Théorème III. — *Quand l'ordre* $(k, \rho)$ *des* $b_n$ *est plus grand que l'ordre des* $c_n$ *et que* $(k, \rho)>(2, 1)$, J *est un nombre transcendant de Liouville.*

Je pose ici $b_n=a'_n$, $c_n=c'_n$, et je me sers de (18), de (23) et de (24). D'après (18) il suffit, pour une infinité de valeurs $n_1$ de $n$,

$$\log a_{n_1+1}>n_1 \alpha \log(4 \beta_{n_1}); \tag{25}$$

je choisis pour les valeurs $n_1$ celles pour lesquelles

$$\log b_{n_1+1}=e_{k_1-1}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] \log \varphi_{n_1+1},$$

$(k_1, \rho_1-\varepsilon)$ étant $<(k, \rho)$ et plus grand que l'ordre des $c_n$.

Il suffit alors, d'après (24),

$$e_{k_1-1}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] \log \varphi_{n_1+1}>4 n_1 \alpha e_{k_1-1}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}) \log \varphi_{n_1},$$

ou, *a fortiori*, puisque $\varphi_x$ est croissant,

$$e_{k_1-2}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}]>\log(4 n_1 \alpha)+e_{k_1-2}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}). \tag{26}$$

Quand $k_1 = 2$,

$$(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon} - n_1^{\rho_1-\varepsilon} = n_1^{\rho_1-\varepsilon}\left[\left(1+\frac{1}{n_1}\right)^{\rho_1-\varepsilon} - 1\right] \geqq \frac{\rho_1-\varepsilon}{2} n_1^{\rho_1-\varepsilon-1},$$

qui est $> \log(4 n_1 \alpha)$ pour $n_1$ assez grand, lorsque $\rho_1 > 1+\varepsilon$; on peut toujours satisfaire à cette condition, quand les $b_n$ sont d'ordre $> (2,1)$ ($\varepsilon$ assez petit).

Quand $k_1 = 3$, il suffit

$$e^{(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon} - n_1^{\rho_1-\varepsilon}} - 1 \geqq e^{\frac{\rho_1-\varepsilon}{2n_1}} - 1 > \frac{\rho-\varepsilon}{2n_1} > e^{-n_1^{\rho_1-\varepsilon}} \log(4 n_1 \alpha),$$

ce qui a lieu pour $n$ assez grand.

Quand $k_1 > 3$, il suffit

$$e_{k_1-2}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] > 4 n_1 \alpha e_{k_1-2}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}),$$
$$e_{k_1-3}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] > \log(4 n_1 \alpha) + e_{k_1-3}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}),$$

ce qui a lieu pour $k_1 = 4$, etc. C. Q. F. D.

*Remarque.* — Ici encore on peut montrer qu'il y a d'autres catégories de nombres de Liouville que ceux qu'on vient d'obtenir. Ainsi, je suppose que les $a_n$ soient d'ordre $(k,\rho) > (1,1)$ et $\leqq (2,1)$ : pour une infinité de valeurs $n_1$ de $n$, $a_{n_1+1} > e_k(n_1^{\rho-\varepsilon})$; d'après (18) et (25), il suffit, pour une infinité de ces valeurs $n_1$,

$$(27) \qquad e_{k-1}(n_1^{\rho-\varepsilon}) > n_1 \alpha \log(4\beta_{n_1}), \qquad (1,1) < (k,\rho) \leqq (2,1),$$

ce qui donne pour $\beta_{n_1}$ une limite supérieure toujours acceptable, c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite de quantités $b_n$ et $a_n$ satisfaisant à (27), $b_n$ étant d'ordre $\leqq (2,1)$. En effet, je suppose $a_n \geqq c_n$, $b_n \leqq a_n^2$, $\beta_n \leqq \alpha_n^2$; je détermine une suite de quantités $a'_n \geqq 1$ d'ordre $(k,\rho)$ satisfaisant à

$$e_{k-1}(n_1^{\rho-\varepsilon}) > 2 n_1 \alpha \log(4\alpha_{n_1}^2)$$

pour une infinité de valeurs $n_1$ de $n$. Je choisis les $c_n$ entiers tels que $c_n \leqq a'_n$, puis les $b_n$ entiers de façon que

$$a'_n \leqq b_n c_n^{-1} \leqq a'_n + 1 \qquad \text{et} \qquad a_n = b_n c_n^{-1}.$$

La suite des $a_n$ est d'ordre $(k, \rho)$, et les $b_n$ sont d'ordre $(k, \rho) \leqq (2, 1)$, d'après le lemme II. J est un nombre de Liouville qui ne rentre pas dans la catégorie trouvée au théorème III.

*Cas où les $b_n$ sont d'ordre infini dans les deux classifications.* — Une suite de quantités d'ordre infini dans une des deux premières classifications l'est aussi dans l'autre (*I. T.*, p. 237). Il me suffit d'envisager la deuxième classification.

On pourra distinguer deux cas, suivant que la suite des $c_n$ est d'ordre plus petit que l'infini ou d'ordre infini.

1° La suite des $c_n$ est d'ordre plus petit que l'infini. D'après le lemme II, la suite des $b_n$ étant d'ordre infini, il en est de même de la suite des $a_n$.

J'applique dès lors les formules (19) et (23) en prenant $a_m = a'_m$, $c_m = c'_m$, $(k_1, \rho_1) > (2, 1+\varepsilon)$, et l'ordre des $c_n$ inférieur à $(k_1, \rho_1 - \varepsilon)$. Il suffira, pour une infinité de valeurs $n_1$,

$$\log a_{n_1+1} > n_1 \alpha \log(4\alpha_{n_1}\gamma_{n_1});$$

je choisis les valeurs $n_1$ telles que

$$\log a_{n_1+1} = e_{k_1-1}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] \log \varphi_{n_1+1};$$

il suffira

$$(28) \qquad e_{k_1-1}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] > 4 n_1 \alpha e_{k_1-1}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}),$$

dès que $n_1$ est assez grand : c'est une conséquence de (26), et, par suite, J est un nombre transcendant de Liouville.

2° La suite des $c_n$ est d'ordre infini.

On pourrait chercher ici à classer au préalable les suites de quantités d'ordre infini d'après les principes que j'ai indiqués sommairement ailleurs [1], et distinguer un certain nombre de cas où une des conditions (15), (16), (18), (19) est satisfaite. Je me contenterai d'un énoncé

[1] *Bull. Soc. Math.*, t. XXXIV, 1906, p. 217-218. Dans l'application de ces principes (par exemple le Corollaire I, p. 219), l'ordre de la suite des $k_n$ à considérer est évidemment l'ordre, en fonction de $n$, de la suite de celles des quantités $k_n$ qui sont *positives*.

moins précis, mais probablement plus général : j'envisagerai le cas où, suivant ce que j'ai dit à propos de (23), l'ordre des $a_m$ est au moins égal à celui [1] des $c_m$ *pour une infinité de valeurs* $n_1 + 1$ *de* $n$. On est encore conduit, d'après (19) et (23) à l'inégalité (28), et J est un nombre transcendant de Liouville.

En résumé :

Théorème IV. — *La suite des* $b_n$ *étant d'ordre infini,* J *est un nombre transcendant de Liouville :* 1° *quand les* $c_n$ *sont d'ordre plus petit que l'infini;* 2° *quand les* $c_n$ *étant d'ordre infini, l'ordre des* $a_n$ *est, au sens défini plus haut à propos de la formule* (23), *d'ordre au moins égal à celui des* $c_n$ *pour une infinité de valeurs de* $n$.

II. *Cas où, parmi les* $a_i$, *il y en a une infinité dont la valeur est* $< 1$. — Une des conditions (14) ou (17) ne peut être satisfaite que si, pour une infinité de valeurs $n_1$ de $n$, $b_{n_1+1}$ est $> c_{n_1+1}$, et même, quand on ne fait aucune restriction sur le mode de croissance des $b_n$, que si la suite des $b_n$ est d'ordre $> (2, \infty)$ dans la première classification, d'ordre $\geqq (2,1)$ dans la deuxième (*I. T.*, p. 228 et suiv.). Les méthodes à employer restant les mêmes que tout à l'heure, j'observerai seulement ce qui suit :

Ordres non infinis : *Première classification.* — Quand l'ordre $(k, \rho)$ des $b_n$ est plus grand que $(k_1, \rho_1)$ qui est plus grand que l'ordre des $c_n$, et $(k_1, \rho_1) > (3, 0)$, la seconde condition (17) a lieu, $b_{n_1+1}$ étant une valeur principale de la suite des $b_n$, si

$$e_k(n_1 + 1)^{\rho - \varepsilon} > c_0^\alpha 2^{n_1\alpha} c_k(n_1)^{(\rho+\varepsilon)n_1(\alpha+1)} e_{k_1}(n_1 + 1)^{\rho_1 - \varepsilon};$$

ceci est une conséquence de (20), quand on y change $\alpha$ en $\alpha + 2$; J est donc alors un nombre de Liouville. Le cas limite $\rho = \infty$ n'offre pas de difficultés.

*Deuxième classification.* — Quand l'ordre $(k, \rho)$ des $b_n$ est plus grand que celui des $c_n$ et $> (2, 1)$, la seconde condition (17) conduit à une condition tout à fait analogue à (25), où $\delta_{n_1}$, qui est la plus

---

[1] On pourrait se placer au même point de vue lorsque les $a_m$, les $b_m$ et les $c_m$ sont d'ordre plus petit que $+\infty$.

grande des quantités $d_1, \ldots, d_{n_1}$, remplace $\beta_{n_1}$ : J est encore un nombre de Liouville.

*Lorsque la suite des $b_n$ est d'ordre infini*, on distingue deux cas : 1° si la suite des $c_n$ est d'ordre fini, d'après (24), où

$$a'_m = b_m, \qquad c'_m = c_m,$$

on a

$$\log b_m c_m^{1} \geqq \tfrac{1}{2} \log b_m$$

pour une infinité de valeurs de $m$ telles que

$$\log b_m = e_{k_1-1}(m^{\rho-\varepsilon}) \log \varphi_m;$$

écrivant la seconde condition (17) pour ces valeurs $n_1 + 1$ de $m$, (23) conduit à une condition analogue à (28), qui a encore lieu pour $n_1$ assez grand. 2° Si la suite des $c_n$ est d'ordre infini, en supposant la suite des $a_n$ d'ordre au moins égal à celui des $c_n$ pour une infinité de valeurs de $n$, on appliquera la troisième inégalité (14) et (23), avec

$$a'_m = a_m, \qquad c'_m = c_m.$$

Il suffit d'après (14), et

$$\log(c_0 c_1 c_2 \ldots c_{n_1})^{\alpha+1} \leqq (n_1 + 1)(\alpha + 1) e_{k_1-1}(n_1{}^{\rho_1-\varepsilon}) \log \varphi_{n_1},$$
$$\log(1 + a_m) \leqq 2 e_{k_1-1}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}) \log \varphi_{n_1}, \qquad m \leqq n_1,$$

que

$$e_{k_1-1}[(n_1 + 1)^{\rho_1-\varepsilon}] > e_{k_1-1}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}).4 n_1(\alpha + 1),$$

ce qui est une conséquence de (28).

En résumé :

THÉORÈME V. — *Les théorèmes* I, III *et* IV *se conservent quand, parmi les $a_i$, il y en a un nombre infini qui sont* $< 1$; *la fraction continue est alors forcément convergente* [1].

---

[1] Car $\sum_1^\infty a_i$ diverge, d'après les énoncés des théorèmes I à IV.

Je me dispense d'examiner si l'extension du théorème II est possible, et s'il y a des cas particuliers analogues à ceux qui ont été rencontrés à propos des théorèmes I à IV.

### IV. — Des fonctions continues divergentes.

Je me propose de montrer rapidement que ces fractions continues peuvent aussi conduire à considérer des nombres de Liouville. Soit encore

$$J = a_0 + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_n + \ldots, \qquad a_i > 0.$$

D'après (2)

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} J_n &= P'_0 Q_0'^{-1} + (P'_1 Q_1'^{-1} - P'_0 Q_0'^{-1}) + \ldots \\ &\qquad + (P'_n Q_n'^{-1} - P'_{n-1} Q_{n-1}'^{-1}), \\ J_n &= P'_0 Q_0'^{-1} + (Q'_0 Q'_1)^{-1} - (Q'_1 Q'_2)^{-1} + \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-1} (Q'_n Q'_{n-1})^{-1}. \end{aligned} \right.$$

La valeur absolue des termes du second membre diminue de gauche à droite à partir du second, car

$$P'_{m-1} < P'_{m+1}, \qquad Q'_{m-1} < Q'_{m+1},$$

d'après (1). Les pseudo-réduites d'ordre $n$ pair augmentent, en restant inférieures à toutes les pseudo-réduites d'ordre $n$ impair, qui diminuent, car

$$J_{2r} < J_{2r+2} < J_{2r+1} < J_{2r-1}.$$

Donc .

$$\lim J_{2r+1} = L_2, \qquad \lim J_{2r} = L_1, \qquad L_2 \geqq L_1.$$

Quand $Q'_{n+1} Q'_n$, qui croît toujours avec $n$, tend vers une limite $\lambda$ finie $> 0$, on a

$$(30) \qquad L_2 = L_1 + \frac{1}{\lambda};$$

la fraction continue diverge, $Q_{2r} > Q'_0 = 1$, et $Q'_{2r+1} > Q'_1 = a_1$ tendent

vers des limites finies $q_1$ et $q_2$, $\sum_1^\infty a_n$ converge (¹). Cette dernière condition est nécessaire, et aussi suffisante. D'après (6),

$$(31) \quad \begin{cases} J_{m+1} - J_{m-1} = (-1)^{m-1} a_{m+1} (Q'_{m-1} Q'_{m+1})^{-1} \\ \qquad = (-1)^{m-1} [(Q'_{m-1} Q'_m)^{-1} - (Q'_m Q'_{m+1})^{-1}] \end{cases}$$

et

$$(32) \quad \begin{cases} J_{2r} = J_0 + (J_2 - J_0) + \ldots + (J_{2r} - J_{2r-2}), \\ J_{2r+1} = J_1 + (J_3 - J_1) + \ldots + (J_{2r+1} - J_{2r-1}). \end{cases}$$

$Q'_{m+1}$ et $Q'_{m-1}$ tendent vers la même limite $q$, égale à $q_1$ ou $q_2$, et sont, dès que $m$ est assez grand, $> \frac{q}{2}$ et $< 2q$. Donc, d'après (31),

$$(33) \quad \frac{a_{m+1}}{4q^2} < \left| J_{m+1} - J_{m-1} \right| < \frac{4a_{m+1}}{q^2}.$$

La somme

$$\Sigma_{m+1} = |(J_{m+1} - J_{m-1}) + (J_{m+3} - J_{m+1}) + \ldots| = |L - J_{m-1}|,$$

où L est $L_2$ ou $L_1$ suivant que $m$ est pair ou impair, est telle que

$$(34) \quad \Sigma_{m+1} < 4q^{-2}(a_{m+1} + a_{m+3} + \ldots) < 4q^{-2}(a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots).$$

Ici, la série $\sum_1^\infty a_n$ converge; par conséquent, à partir d'une certaine valeur de $n_1$, on a (²)

$$a_n < \mu^{-1}, \qquad a_n^{-1} > \mu.$$

---

(¹) On trouvera une démonstration dans le Mémoire précité de Stieltjes (*Ann. Fac. Toul.*, 1894, *J*, p. 30 à 32), où il suffit de changer $P_n$ en $P'_n$, $Q_n$ en $Q'_n$, L en $L_1$, $L_1$ en $L_2$. On peut aussi consulter OTTO STOLZ, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, Leipzig, Teubner, 1885-1886, t. II, Chap. VIII, en particulier, p. 282.

(²) Dès lors, la suite des $a_n^{-1}$ est d'ordre (0,1) dans les deux premières clas-

si grand que soit le nombre $\mu$ donné : on voit que, à côté de l'ordre $(k, \rho)$ des $a_n^{-1} = c_n b_n^{-1}$, on peut envisager une quantité analogue définie de la façon suivante, avec la première ou la deuxième classification respectivement : si l'on a, pour $n > \nu$,

$$(35) \qquad a_n^{-1} > e_l(n)^{\sigma-\varepsilon}, \qquad \text{ou} \qquad a_n^{-1} > e_l(n^{\sigma-\varepsilon}),$$

et, pour une infinité de valeurs $n_2$ de $n$,

$$(36) \qquad a_{n_2}^{-1} < e_l(n_2)^{\sigma+\varepsilon}, \qquad \text{ou} \qquad a_{n_2}^{-1} < e_l(n_2^{\rho+\varepsilon}),$$

$\varepsilon$ fixe positif aussi petit qu'on veut dès que $\nu$ est assez grand, on pourra dire que la suite des $a_n^{-1}$ est *d'ordre minimum* $(l, \sigma)$, en remplaçant alors ici l'expression « d'ordre $(k, \rho)$ » utilisée dans les paragraphes précédents par celle *d'ordre maximum* $(k, \rho)$. Cette nouvelle dénomination ne devient nécessaire que si l'on considère simultanément l'ordre maximum et l'ordre minimum [1]. A l'ordre minimum correspondent évidemment une infinité de *valeurs principales* $a_{n_2}$, comme pour l'ordre maximum ; l'on a $(l, \sigma) \leq (k, \rho)$.

Ceci posé, je me sers de la première classification, et je sup-

---

sifications, sans quoi l'on aurait, à partir d'une certaine valeur de $n$,

$$a_n^{-1} < n, \qquad \frac{1}{n} < a_n,$$

et la série ne serait pas convergente. Grâce à un raisonnement complémentaire analogue, on peut donc, avec ma terminologie, énoncer incidemment ce lemme :

Lemme. — *Dans une série convergente à termes positifs $\Sigma\, a_n$, la suite des $a_n^{-1}$ est d'ordre* $\geq (0,1)$ *dans les deux premières classifications.*

*Pour une fonction entière à termes positifs $\Sigma\, a_n z^n$, la suite des $a_n^{-1}$ est d'ordre minimum* $(1,\infty)$ *dans la première classification, d'ordre minimum* $\geq (1,1)$ *dans la deuxième; et réciproquement, sauf un cas douteux quand cet ordre est* $(1,1)$ *dans la deuxième classification.*

(1) L'extension aux fonctions entières est immédiate : les deux ordres se confondent pour les fonctions entières à croissance régulière. (*Comp.* Borel, *Leçons sur les fonctions entières, passim*, en particulier, p. 22 et 120.)

pose $(l, \sigma) > (3, 0)$. D'après (35)

$$a_n < e_l(n)^{\varepsilon-\sigma},$$

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots < \sum_{m+1}^{\infty} e_l(n)^{\varepsilon-\sigma}.$$

Or

$$e_l(n+1)^{\sigma-\varepsilon} > 2e_l(n)^{\sigma-\varepsilon},$$

d'après (20 *bis*); donc :

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots < e_l(m+1)^{\varepsilon-\sigma}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) < 2e_l(m+1)^{\varepsilon-\sigma},$$

et, d'après (34),

$$\Sigma_{m+1} < 8q^{-2}e_l(m+1)^{\varepsilon-\sigma}. \tag{37}$$

D'autre part, on a, d'après (7),

$$J_m = \varpi'_m \chi'^{-1}_m, \qquad L_1 = \frac{\varpi'_{2r}}{\chi'_{2r}} + \Sigma_{2r+2}, \qquad L_2 = \frac{\varpi'_{2r+1}}{\chi'_{2r+1}} - \Sigma_{2r+3}.$$

D'après (37), pour que $L_1$ et $L_2$ soient des nombres de Liouville, il suffit que

$$8q^{-2}e_l(2r+2)^{\varepsilon+\sigma} < \chi_{2r}^{-\alpha}, \qquad 8q^{-2}e_l(2r+3)^{\varepsilon-\sigma} < \chi_{2r+1}^{\alpha},$$

respectivement, pour une infinité de valeurs de $r$, ou encore,

$$(38) \quad 8\chi'^{\alpha}_{2r} < q^2e_l(2r+2)^{\sigma-\varepsilon}, \qquad 8\chi'^{\alpha}_{2r+1} < q^2e_l(2r+3)^{\sigma-\varepsilon}.$$

Ici, d'après (35), à partir d'une certaine valeur de $n$, $c_n > b_n$; (10) donne alors $\chi'_m < 2^m\gamma_m^{m+1}$, où $\gamma_m$ est la plus grande des quantités $c_0, c_1, \ldots, c_m, b_0, b_1, \ldots, b_m$. Il suffira que l'on ait, pour une infinité de valeurs paires et de valeurs impaires de $m$,

$$8(2^m\gamma_m^{m+1})^{\alpha} < q^2e_l(m+2)^{\sigma-\varepsilon}. \tag{39}$$

Je suppose les ordres maximum et minimum des $a_n^{-1}$ égaux à $(l, \theta)$ et $(l, \theta_1)$, l'ordre maximum des $b_n$ au plus égal à $(l, \theta_2)$, où $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$ sont

finis $> 0$, $\sigma = \theta_1$. Alors les ordres maximum et minimum des $c_n$ sont égaux à $(l, \tau)$, $(l, \tau_1)$ (lemme I ou raisonnements analogues), avec $\tau$, $\tau_1$ finis $> 0$; il suffira, pour $m$ assez grand,

$$\alpha[m \log 2 + (m+1)(\tau + \varepsilon)e_{l-1}(m)] < (\sigma - \varepsilon)e_{l-1}(m+2) + \log \frac{q^2}{8},$$

ce qui résulte de (20 *bis*). Donc :

THÉORÈME VI. — *Lorsque* J *est une fraction continue divergente, les* $a_n^{-1}$ *étant d'ordre maximum et minimum* $(l, \theta)$ *et* $(l, \theta_1)$ *plus grands que* $(3, 0)$ *et les* $b_n$ *d'ordre* $\leq (l, \theta_2)$, $(\theta, \theta_1, \theta_2$ *étant finis et* $> 0)$, *dans la première classification, les pseudoréduites d'ordre pair et impair tendent respectivement vers des limites distinctes* $L_1$ *et* $L_2$ *qui sont des nombres transcendants de Liouville.*

Je ne m'attarde pas davantage sur les fractions continues divergentes : on pourrait trouver d'autres exemples dans les deux classifications, en s'inspirant des idées contenues dans un Mémoire antérieur : *Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants* (*Journ. de Mathém.*, 1904, p. 288-303). Je remarque seulement que, d'après[1] un passage de Stieltjes, les pseudoréduites d'ordre pair sont les pseudoréduites d'une fraction continue convergente

$$m_0 : n_0 - m_1 : n_1 - m_2 : n_2 - \ldots,$$

dont les numérateurs $-m_1$, $-m_2$, ... sont négatifs, ce qui donne le moyen de former des fractions continues convergentes de ce type et qui sont des nombres de Liouville.

## V. — Des fractions continues quasi-périodiques.

Une fraction continue $J = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots$ est quasi-périodique lorsque l'on peut trouver parmi les nombres $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... une infinité de suites de $s_1$, $s_2$, ..., $s_m$, ... nombres $a_i$ consécutifs et dont chacune est formée par la répétition un nombre $k_1$, $k_2$, ..., $k_m$, ...

(1) Mémoire précité, p. 3, formule (I').

aussi grand qu'on veut de fois (dès que $m$ est assez grand) d'un même groupe ou arrangement de nombres consécutifs $a_i$. On sait (*I. T.*, p. 127, 131 et suiv.) que, les $a_i$ étant entiers $> 0$, lorsque $k_m$ croît assez vite avec $m$ par rapport à $s_m k_m^{-1}$ et au nombre $\alpha_m$ des nombres $a_i$ de la partie non périodique qui précède les périodes, J est un nombre transcendant. Dans des cas étendus ([1]), la racine carrée d'un nombre transcendant de Liouville est une fraction continue quasi-périodique.

Je vais indiquer ici des cas analogues où, J étant quasi-périodique et les $a_i = b_i c^{-1}$, entiers ou fractionnaires $\geq 1$, J est un nombre transcendant.

Je conserve les notations de ma démonstration relative au cas où $a_i$ est entier (*I. T.*, p. 131), et je suis la même marche, en remplaçant I par J.

Si $p_i q_i^{-1}$ est la $i^{\text{ième}}$ pseudo-réduite de J et de $Y_n$, on a encore la formule $(3_7)$ (*I. T.*, p. 132)

$$(3_7) \qquad R_n Y_n^2 + R'_n Y_n + R''_n = 0,$$

avec

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} R_n &= \quad q_{\alpha_n} q_{\alpha_n+\lambda_n-1} - q_{\alpha_n-1} q_{\alpha_n+\lambda_n}, \\ R'_n &= -q_{\alpha_n} p_{\alpha_n+\lambda_n-1} - p_{\alpha_n} q_{\alpha_n+\lambda_n-1} + q_{\alpha_n+\lambda_n} p_{\alpha_n-1} + q_{\alpha_n-1} p_{\alpha_n+\lambda_n}, \\ R''_n &= \quad p_{\alpha_n} p_{\alpha_n+\lambda_n-1} - p_{\alpha_n-1} p_{\alpha_n+\lambda_n}. \end{aligned} \right.$$

Or, d'après (1) et (10), on voit que $R_n$, $R'_n$, $R''_n$ ont leur valeur absolue limitée supérieurement en fonction de $\alpha_n$, $\lambda_n$ et des $\alpha_n + \lambda_n + 1$ premières quantités $a_i (i = 0, 1, \ldots, \alpha_n + \lambda_n)$.

On doit remarquer que, lorsque les $a_i$ ne sont plus tous entiers, $Y_n$ peut être un nombre rationnel ou quadratique, tandis qu'il est forcément quadratique quand les $a_i$ sont entiers. Il suffit de citer la fraction continue

$$x = \tfrac{3}{2} + 1 : \tfrac{3}{2} + 1 : \tfrac{3}{2} + \ldots, \qquad x^2 - \tfrac{3}{2}x - 1 = 0, \qquad x = 2.$$

Il devient donc nécessaire de distinguer deux cas : $Y_n$ est ou n'est pas rationnel.

---

([1]) *Bull. Soc. math.*, 1906, p. 215, théorème I et p. 219, corollaire I.

Je vais d'abord vérifier que la relation ($3_7$) n'est pas une identité. En effet, si

$$R_n = R'_n = R''_n = 0,$$

$$q_{\alpha_n+\lambda_n} = \frac{q_{\alpha_n}}{q_{\alpha_n-1}} q_{\alpha_n+\lambda_n-1}, \qquad p_{\alpha_n+\lambda_n} = \frac{p_{\alpha_n}}{p_{\alpha_n-1}} p_{\alpha_n+\lambda_n-1},$$

$$R'_n = (p_{\alpha_n+\lambda_n-1} q_{\alpha_n-1} - q_{\alpha_n+\lambda_n-1} p_{\alpha_n-1}) \left( \frac{p_{\alpha_n}}{p_{\alpha_n-1}} - \frac{q_{\alpha_n}}{q_{\alpha_n-1}} \right) = 0.$$

Or

$$\frac{p_{\alpha_n}}{p_{\alpha_n-1}} - \frac{q_{\alpha_n}}{q_{\alpha_n-1}} = \frac{p_{\alpha_n} q_{\alpha_n-1} - p_{\alpha_n-1} q_{\alpha_n}}{p_{\alpha_n} q_{\alpha_n-1}} \neq 0,$$

d'après (2); il faudrait donc

$$\frac{p_{\alpha_n+\lambda_n-1}}{q_{\alpha_n+\lambda_n-1}} = \frac{p_{\alpha_n-1}}{q_{\alpha_n-1}},$$

ce qui est impossible, d'après (29), puisqu'il n'y a pas deux pseudo-réduites égales. $Y_n$ sera donc déterminée par ($3_7$) et deux des quantités $R_n$, $R'_n$, $R''_n$ sont $\neq 0$ :

1° $Y_n$ est rationnel, pour une infinité de valeurs de $n$, bien entendu. Il résulte de ($3_7$) que le numérateur $F_n$ et le dénominateur $G_n$ de $Y_n$ mis sous forme de fraction irréductible $F_n G_n^{-1}$ sont des entiers limités en fonction de $\alpha_n$, $\lambda_n$ et des $\alpha_n + \lambda_n + 1$ premières quantités $b_i$, $c_i$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_n + \lambda_n),$$

d'après (7). Je me dispense de faire le calcul qui n'est pas bien difficile. Dès lors, d'après (9),

$$|J - p_{\alpha_n+k_n\lambda_n} q^{-1}_{\alpha_n+k_n\lambda_n}| < q^{-2}_{\alpha_n+k_n\lambda_n}, \qquad |Y_n - p_{\alpha_n+k_n\lambda_n} q^{-1}_{\alpha_n+k_n\lambda_n}| < q^{-2}_{\alpha_n+k_n\lambda_n},$$

$$(4_7) \qquad |J - Y_n| < 2 q^{-2}_{\alpha_n+k_n\lambda_n}.$$

Si J n'est pas rationnel [1] (et égal à $Y_n$), supposant qu'il y a une

---

[1] Si J est rationnel et égal à $pq^{-1}$, $|J - p_i q_i^{-1}| < q_i^{-1} q_{i+1}^{-1}$; d'après (9), $q_i q_{i+1} < q q_i c_0 c_1 \ldots c_i$; d'après (10), on a, quel que soit $i$,

$$a_1 a_2 \ldots a_{i+1} < q c_0 c_1 \ldots c_i.$$

infinité de valeurs de $n$, telles que $k_n$ soit assez grand et que, d'après ($10\,bis$),

$$q_{\alpha_n+k_n\lambda_n} > G_n^\alpha,$$

si grand que soit le nombre fixe $\alpha$, J est un nombre transcendant de Liouville.

2° $Y_n$ est irrationnel, pour une infinité de valeurs de $n$, bien entendu. Il est quadratique; $(4_7)$ a encore lieu. Si J n'est pas quadratique (et égal à $Y_n$), on a $J - Y_n \neq 0$ et, dans $(3_7)$, $R_n$ et $R''_n$ sont $\neq 0$.

Je suppose J algébrique et racine d'une équation donnée $f(x) = 0$ de degré $d$, dont les coefficients, entiers, ont leur valeur absolue $\leqq a'$; d'après (7) et (40),

$$|Y_n||Y'_n| = |R''_n R_n^{-1}| < |R''_n|(c_0 c_1 \ldots c_{\alpha_n})^2 c_{\alpha_n+1} \ldots c_{\alpha_n+\lambda_n} = |R''_n \theta_n|,$$
$$|Y'_n| < |M R''_n \theta_n|,$$

M constante, le second membre $\geqq 1$,

$$|f(Y'_n)| \leqq a'(d+1)|M R''_n \theta_n|^d.$$

$Y_n$ est racine de l'équation

$$R_n \theta_n Y_n^2 + R'_n \theta_n Y_n + R''_n \theta_n = 0,$$

à coefficients entiers. On prend $B_0 = R_n \theta_n$ et l'on conclut qu'il faut

$$|J - Y_n| \geqq |M_1 a'(d+1)(M R_n R''_n \theta_n^2)^d|^{-1}.$$

Cette inégalité sera impossible si l'on prend $k_n$ assez grand par rapport à $\alpha_n$, $\lambda_n$ et aux $b_i$, $c_i$ ($i \leqq \alpha_n + \lambda_n$) pour que, pour une infinité de valeurs de $n$,

$$(40\,bis) \qquad q_{\alpha_n+k_n\lambda_n} \geqq 2|\omega R_n R''_n \theta_n^2|^\omega,$$

si grand que soit le nombre fixe $\omega$. Donc :

THÉORÈME VII. — *Si, pour une infinité de valeurs de $n$, $k_n$ dé-*

*passe une certaine limite inférieure* (1) *qui dépend de* $\alpha_n$, $\lambda_n$ *et des* $b_i$, $c_i$, *avec* $a_i = b_i c_i^{-1} \geqq 1$, $i \leqq \alpha_n + \lambda_n$, J *est un nombre rationnel, quadratique ou transcendant.*

*Remarque I.* — Dans le cas où $Y_n$ est quadratique pour une infinité de valeurs de $n$, telles que (40 *bis*) ait lieu, on peut chercher à déterminer plus exactement la nature arithmétique du nombre J supposé transcendant. Soient

$$(41) \quad J = \zeta_0 + 1 : \zeta_1 + 1 : \zeta_2 + \ldots, \qquad Y_n = \zeta'_0 + 1 : \zeta'_1 + 1 : \zeta'_2 + \ldots,$$

où les $\zeta_i$, $\zeta'_i$ sont entiers positifs $\geqq 1$, les développements en fraction continue ordinaire de J et $Y_n$. Le développement $\zeta'_0 + 1 : \zeta'_1 + 1 : \zeta'_2 + \ldots$ est périodique; or, le nombre des termes de la partie non périodique du développement en fraction continue ordinaire de la racine,

$$x = \frac{E + \sqrt{A}}{D} = \rho_0 + 1 : \rho_1 + \ldots \qquad \text{(A entier positif non carré parfait)},$$

de

$$Lx^2 - 2Mx + N = 0$$

($D = \pm L$, $E = \pm M$, $A = M^2 - LN$, L, M, N entiers, notations de Serret, *Algèbre supérieure*, t. I, 5me édition, Paris, Gauthier-Villars, 1885, p. 38-45) est $\leqq \frac{\log|D|}{\log 2} + 3 + 2A$ (2) et la période a au

---

(1) On peut évidemment se proposer de trouver des limites inférieures plus précises de la croissance des $k_n$ à l'aide des calculs précédents; je ne m'en occuperai pas.

(2) Soit $n_1$ le plus petit entier tel que (Notations de Serret) $Q_{n_1}^2 > |L| = |D : D_n$ et $E_n$ sont positifs pour $n \geqq n_1$; or $Q_{n_1} > 2^{\frac{n_1 - 2}{2}}$ (*I. T.*, p. 3 et 42). Soit $n'$ le plus grand entier, tel que $2^{n'-3} \leqq |D|$; on a

$$Q_{n'}^2 > 2^{n'-2} > |D|, \qquad n' \leqq 3 + \frac{\log|D|}{\log 2}, \qquad n_1 \leqq n'.$$

Mais, d'après le raisonnement de Serret, *on peut seulement affirmer que la partie non périodique* a au plus, non $n_1$ termes, en dehors de $\zeta'_0$, mais $n_1 + 2A$ termes et $\rho_{n+1} < 2\sqrt{A}$ pour $n \geqq n_1$.

plus $2A$ termes; enfin les termes de la partie non périodique ne dépassent pas $F = 2\sqrt{5}\varphi$, si $\varphi$ est la plus grande des quantités $2\sqrt{A}$, $|L|$, $|M|$, $|N|$, les termes de la partie périodique ne dépassent pas $2\sqrt{A} \leqq F$.

Ici, $Y_n$ est racine de l'équation ($3_7$), qu'on peut écrire

$$T_n Y_n^2 + T'_n Y_n + T''_n = 0,$$

où $T_n$, $T'_n$, $T''_n$ sont entiers, avec

$$L = T_n = 2R_n\theta_n, \qquad -2M = T'_n = 2R'_n\theta_n, \qquad N = T''_n = 2R''_n\theta_n,$$
$$A = M^2 - LN = \tfrac{1}{4}(T'^2_n - 4T_n T''_n).$$

Ceci posé, on voit que $|J - Y_n|$ est limité supérieurement en fonction des $\alpha_n + \lambda_n + 1$ premières quantités $b_i$, $c_i$, de $\alpha_n$, de $\lambda_n$, de $k_n$, et inférieurement en fonction du nombre de quotients incomplets que l'on suppose communs aux développements (41).

---

D'autre part, d'après la formule (11), page 42, de Serret, quel que soit $n$,

$$|D_n| = \frac{Q_n^2}{Q_n Q_{n+1}}\left(2\sqrt{A} + \frac{|D|}{Q_n Q_{n+1}}\right) = \frac{2\sqrt{A}\,Q_n}{Q_{n+1}} + \frac{|D|}{Q_{n+1}^2} < 2\sqrt{A} + |D|,$$

et, d'après (4) et (5) (p. 44 de Serret), $|D_n|$ étant entier, on obtient une limite supérieure S de $a_n$, quel que soit $n$, en fonction de L, M, N, limite applicable aux $n_1 + 1$ premiers quotients. Sans trop chercher la précision, soit $\varphi$ la plus grande des quantités $|D| = |L|$, $|E| = |M|$, $|D_{-1}| = |N|$ et $2\sqrt{A}$; on trouve

$$\rho_n \leqq 2\sqrt{5}\,\varphi = S.$$

Il en résulte que les quotients incomplets de la partie non périodique de $x = \dfrac{E + \sqrt{A}}{D}$ ne peuvent dépasser S, et même, ceux d'indice supérieur à $\dfrac{\log|D|}{\log 2} + 3$ ne dépassent pas $2\sqrt{A}$. Ces derniers, comme nombre et valeur, ont les mêmes limites supérieures que les quotients d'une période et jouent, à cet égard, le même rôle.

Ceci éclaircira et permettra de compléter un passage de mon article du *Bulletin de la Société mathématique*, 1906, page 222, si l'on observe : 1° que $\nu_m$ y est, en réalité, non le nombre des termes de la partie non périodique de $X_m$, comme je l'ai dit à tort, mais, à une unité près, la valeur de $n$ à partir de laquelle $D_n$ et $E_n$ sont positifs; 2° que ces $\nu_m$ termes ont une limite supérieure $Q_m^{\theta_1}$ ($\theta_1$ fini), d'après les notations de cet article.

Soient, en effet, $\zeta_{m+1}$, $\zeta'_{m+1}$ les deux premiers quotients incomplets différents de même indice, $\xi_{m+1}$, $\xi'_{m+1}$ les quotients complets correspondants, $p'_i q'^{-1}_i$ les réduites de $Y_n$ : avec mes notations (*I. T.*, p. 4),

$$J = \frac{p'_m \xi_{m+1} + p'_{m-1}}{q'_m \xi_{m+1} + q'_{m-1}}, \qquad Y_n = \frac{p'_m \xi'_{m+1} + p'_{m-1}}{q'_m \xi'_{m+1} + q'_{m-1}},$$

$$|J - Y_n| = \frac{|\xi_{m+1} - \xi'_{m+1}|}{(q'_m \xi_{m+1} + q'_{m-1})(q'_m \xi'_{m+1} + q'_{m-1})} > (4 q'^2_m)^{-1} |\xi'^{-1}_{m+1} - \xi^{-1}_{m+1}|;$$

on a de plus

$$\xi'_i \leqq F + 1 < 2F, \qquad \xi'^{-1}_i > (2F)^{-1}.$$

Quand $\xi'_{m+1} < \xi_{m+1} \leqq 2\xi'_{m+1}$, on a

$$\xi'_{m+2} \geqq 1 + \xi'^{-1}_{m+3} > 1 + (2F)^{-1} = \frac{2F + 1}{2F},$$

$$\xi'^{-1}_{m+2} < \frac{2F}{2F+1}, \qquad \xi_{m+1} - \xi'_{m+1} \geqq 1 - \xi'^{-1}_{m+2} > \frac{1}{2F+1};$$

$$\xi'^{-1}_{m+1} - \xi^{-1}_{m+1} > \frac{1}{(2F+1)\xi_{m+1}\xi'_{m+1}} > \frac{1}{2(2F+1)(2F)^2} > (4F)^{-3}.$$

Quand $\xi_{m+1} > 2\xi'_{m+1}$,

$$\xi'^{-1}_{m+1} - \xi^{-1}_{m+1} \geqq \frac{1}{2\xi'_{m+1}} > (4F)^{-1} > (4F)^{-3}.$$

Quand $\xi_{m+1} < \xi'_{m+1} = \zeta'_{m+1} + \xi'^{-1}_{m+2}$,

$$\xi_{m+1} - \xi_{m+1} > \xi'^{-1}_{m+2} > (2F)^{-1},$$

$$\xi^{-1}_{m+1} - \xi'^{-1}_{m+1} > \frac{1}{2F\,\xi_{m+1}\,\xi'_{m+1}} > (2F)^{-3} > (4F)^{-3}.$$

Finalement, on a toujours $|\xi^{-1}_{m+1} - \xi'^{-1}_{m+1}| > (4F)^{-3}$, et

$$|J - Y_n| > (4q'^2_m)^{-1}(4F)^{-3};$$

enfin, d'après (10),

$$q'_m \leqq 2^m \zeta'_1 \ldots \zeta'_m \leqq (2F)^m,$$

d'où, tenant compte de ($4_7$),

$$2 q^2_{\alpha_n + k_n \lambda_n} > |J - Y_n| > (2^{2m+8} F^{2m+3})^{-1},$$

ou

$$2^{2m+9}\,\mathrm{F}^{2m+3} > q^2_{\alpha_n+k_n\lambda_n} > 2^{\alpha_n+k_n\lambda_n-\nu}, \qquad \nu \text{ fini},$$

d'après (10 *bis*). Le nombre $m$ est ainsi limité inférieurement en fonction de $k_n$; comme la période du développement (41) de $Y_n$ a au plus $2A$ termes, et la partie non périodique $3 + \frac{\log|L|}{\log 2} + 2A$ termes, on voit que, si $k_n$ est assez grand, les développements (41) ont autant de périodes communes que l'on veut. Par conséquent :

Corollaire. — *Tout étant posé comme au théorème* VII, *lorsque, pour une infinité de valeurs de $n$, $Y_n$ est quadratique, et que $k_n$ dépasse une certaine limite inférieure qui dépend de $\alpha_n$, $\lambda_n$ et des $b_i$, $c_i$ ($i \leqq \alpha_n + \lambda_n$), le développement en fraction continue ordinaire (c'est-à-dire à quotients incomplets entiers positifs) de* J *est périodique ou quasi-périodique.*

*Remarque II.* — Il existe des cas étendus où l'on peut préciser un peu plus et certifier que J n'est pas rationnel, et même qu'il est transcendant.

La suite des $c_i$ étant donnée et $c_i \geqq 1$, j'admets que l'on puisse trouver un mode de représentation des nombres positifs par les fractions continues

$$\frac{b_0}{c_0} + 1 : \frac{b_1}{c_1} + 1 : \frac{b_2}{c_2} + \ldots,$$

où les $b_i$, entiers $> 0$, satisfont au besoin à certaines conditions, mode tel qu'à tout nombre positif N′ correspond une et *une seule* fraction continue de cette forme : ce sera le cas, comme on sait, quand $c_i = 1$; ce sera encore le cas, comme on va le voir, quand on prend $b_i \geqq c_i c_{i-1}$ pour $i > 0$.

En effet, soit N′ un nombre positif, et la suite des $c_i$ donnée : je puis trouver $b_0$ entier positif tel que

$$(42) \qquad \mathrm{N}' - \frac{b_0}{c_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} < \frac{1}{c_0}, \qquad \varepsilon_0 > c_0, \qquad b_0 = \mathrm{E}(\mathrm{N}'c_0) \geqq 0,$$

puis $b_1, b_2, \ldots$ entiers positifs tels que

$$(43)\quad \begin{cases} \varepsilon_0 - \dfrac{b_1}{c_1} = \dfrac{1}{\varepsilon_1} < \dfrac{1}{c_1}, & \varepsilon_1 > c_1, \quad b_1 = \mathrm{E}(c_1\varepsilon_0) \geqq c_1 c_0, \\ \varepsilon_1 - \dfrac{b_2}{c_2} = \dfrac{1}{\varepsilon_2} < \dfrac{1}{c_2}, & \varepsilon_2 > c_2, \quad b_2 = \mathrm{E}(c_2\varepsilon_1) \geqq c_2 c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On a $\varepsilon_i > c_i$, en sorte que, si la fraction continue est limitée, le dernier quotient $\varepsilon_{n-1} = b_n c_n^{-1}$ est $> c_{n-1}$.

Ce procédé donne pour tout nombre $N' > 0$ un développement unique en fraction continue, évidemment convergent, puisque $c_i \geqq 1$, $a_i = b_i c_i^{-1} \geqq 1$ (*I. T.*, p. 3). Inversement, deux développements

$$N' = \frac{b_0}{c_0} + 1 : \frac{b_1}{c_1} + 1 : \frac{b_2}{c_2} + \ldots, \qquad N'_1 = \frac{b'_0}{c_0} + 1 : \frac{b'_1}{c_1} + 1 : \frac{b'_2}{c^2} + \ldots,$$

avec $b_i, b'_i, c_i, c'_i > 0$ et $b_i \geqq c_i c_{i-1}$, $b'_i \geqq c_i c_{i-1}$, le dernier quotient $\varepsilon_{n-1}$, dans le cas d'une fraction continue limitée étant $> c_{n-1}$, représentent deux nombres distincts; car, si $N' = N'_1$,

$$N' = \frac{b_0}{c_0} + \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{b'_0}{c_0} + \frac{1}{\varepsilon'_0}, \qquad \varepsilon_0 \geqq \frac{b_1}{c_1}, \qquad \varepsilon'_0 \geqq \frac{b'_1}{c_1},$$

d'où

$$\varepsilon_0 > c_0, \qquad \varepsilon'_0 > c_0, \qquad \frac{|b_0 - b'_0|}{c_0} = |\varepsilon_0^{-1} - \varepsilon_0'^{-1}| < c_0^{-1}, \qquad b_0 = b'_0,$$

$$N' = \frac{b_0}{c_0} + 1 : \frac{b_1}{c_1} + 1 : \varepsilon_1 = \frac{b_0}{c_0} + 1 : \frac{b'_1}{c_1} + 1 : \varepsilon'_1,$$

$$\frac{b_1}{c_1} + 1 : \varepsilon_1 = \frac{b'_1}{c_1} + 1 : \varepsilon'_1.$$

En vertu du même raisonnement, qui peut évidemment se continuer indéfiniment, $b_1 = b'_1$, $b_2 = b'_2$, etc. Donc $N' = N'_1$ (¹).

Le développement ainsi obtenu de $N'$ ne peut évidemment s'arrêter que si $N'$ est rationnel : pour une certaine valeur $i$ l'on a alors

(¹) Ce qui précède reste vrai, même si les $c_i \geqq 1$ sont rationnels ou irrationnels.

exactement

$$\varepsilon_{i-1} = b_i c_i^{-1} > c_{i-1}.$$

La réciproque est vraie; on le vérifie par la même méthode [1] que lorsque les $c_j$ sont égaux à 1.

Soit en effet $N' = \frac{A}{A_1}$, avec $A$, $A_1$ entiers premiers entre eux : les relations (42), (43) s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{ll} A c_0 \quad - A_1 b_0 = A_2 = \dfrac{A_1 c_0}{\varepsilon_0} < A_1, & \varepsilon_0 = \dfrac{A_1 c_0}{A_2}, \\ A_1 c_0 c_1 - A_2 b_1 = A_3 = \dfrac{A_2 c_1}{\varepsilon_1} < A_2, & \varepsilon_1 = \dfrac{A_2 c_1}{A_3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right.$$

Les $A_2$, $A_3$, ... sont des entiers positifs qui ne peuvent diminuer indéfiniment : l'un deux s'annule, et $N'$ se représente par une fraction continue limitée. Donc :

*Dans le mode de développement en fraction continue défini par (42) et (43), les $c_i$ étant entiers $> 0$, les irrationnelles sont caractérisées par un développement en fraction continue illimitée.*

Supposant que le développement $J = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots$ satisfasse aux conditions (42), (43), il en est de même de $Y_n$, qui n'est pas rationnel. Dès lors :

Théorème VIII. — *Tout étant posé comme au théorème VII, lorsque l'on a $b_i \geqq c_i c_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $J$ est quadratique ou transcendant; par suite, si $k_n$ satisfait aux conditions du corollaire précédent, le développement en fraction continue ordinaire de $J$ est périodique ou quasi-périodique.*

On peut dans certains cas préciser un peu plus. Ainsi :

Corollaire [2]. — *Tout étant posé comme au théorème VIII, $J$ est*

---

[1] Serret, *Algèbre supérieure*, t. I, 5e édition, 1885, p. 7.

[2] Voici des indications sur la démonstration.

Pour le développement en fraction continue du type (42), (43) d'une irration-

*transcendant quand l'on a, pour une infinité de valeurs de* $i$,

$$b_i > \alpha(c_0 c_1 \ldots c_{i-1})^2 c_i,$$

*si grand que soit* $\alpha$. *Ceci est le cas quand les* $c_i$ *sont tous limités et que* $b_i > \alpha^i$ *pour une infinité de valeurs de* $i$.

*Si de plus* $k_n$ *satisfait aux conditions du corollaire du théorème VII, le développement en fraction continue de* J *est quasi-périodique.*

### VI. — Autre forme de fractions continues.

Au lieu d'envisager des fractions continues de la forme J, on peut aussi considérer les fractions

$$(44) \qquad K = g_0 + \cfrac{h_1}{g_1 + \cfrac{h_2}{g_2 + \ldots}},$$

que j'écrirai plus simplement (les confusions de notations étant faciles à éviter)

$$K = g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 + \ldots.$$

On les ramène de suite aux fractions J, car

$$\left\{\begin{aligned} g_0 + h_1 : g_1 &= g_0 + 1 : g_1 h_1^{-1}, \\ g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 &= g_0 + 1 : g_1 h_1^{-1} + h_2 h_1^{-1} : g_2 \\ &= g_0 + 1 : g_1 h_1^{-1} + 1 : g_2 h_1 h_2^{-1}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

---

nelle quadratique, les calculs de l'*Algèbre supérieure* de Serret (t. I, 1885, 5e édition, p. 38-45) se conservent; mais $P_n Q_n^{1}$ devient une pseudo-réduite, et l'on ne sait plus si les $D_n$, $E_n$ sont entiers. La formule (11), page 42-43, et les formules (4) et (5), page 44 de cet Ouvrage donnent pour $n$ assez grand, d'après ma formule (7),

$$2\sqrt{A}\, a_n^{-1} > D_n > |D c_0^2 c_1^2 \ldots c_{n-1}^2|^{-1}, \qquad D_n > 0, \qquad |E_n| < \sqrt{A},$$

et même, quel que soit $n$,

$$(2\sqrt{A} + |D|)\, a_n^{-1} > D_n > |D c_0^2 c_1^2 \ldots c_{n-1}^2|^{-1};$$

ceci limite $b_n = a_n c_n$ en fonction de $\sqrt{A}$, $|D|$, $c_0, \ldots, c_{n-1}, c_n$. Si les $c_n$ sont limités, $b_n < \theta^n$, où $\theta$ est une constante convenable.

Finalement,

$$(45) \qquad \mathrm{K} = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots,$$

avec

$$(46) \qquad \begin{cases} a_{2n} = g_{2n}\dfrac{h_1 h_3 \ldots h_{2n-1}}{h_2 h_4 \ldots h_{2n}}, & a_0 = g_0, \\ a_{2n+1} = g_{2n+1}\dfrac{h_2 h_4 \ldots h_{2n}}{h_1 h_3 \ldots h_{2n+1}}, & a_1 = g_1 h_1^{-1}. \end{cases}$$

Les deux fractions (44) et (45) ont mêmes pseudoréduites, et sont par conséquent à la fois convergentes ou divergentes : on peut aussi écrire

$$(47) \qquad a_i = \frac{h_{i-1} h_{i-3} \ldots}{h_i h_{i-2} \ldots} g_i, \qquad a_i a_{i-1} = g_i g_{i-1} h_i^{-1}.$$

Ces formules permettront d'appliquer les résultats précédemment trouvés pour le cas où les $a_m$ sont rationnels $> 0$ aux fractions continues (44). Je me bornerai à quelques indications, en supposant $g_0$ rationnel $> 0$, et les $g_i$, $h_i$ entiers positifs pour $i > 0$.

Il n'y a qu'à se reporter aux formules (14) et (17), en observant que $b_i$ et $c_i$ n'y sont pas forcément premiers entre eux, et posant

$$b_i = g_i h_{i-1} h_{i-3} \ldots, \qquad c_i = h_i h_{i-2} \ldots,$$

pour obtenir des conditions très générales suffisantes quand on veut que K soit un nombre transcendant de Liouville ([1]). Mais je me contenterai de faire une application des théorèmes I et suivants.

*Première classification.* — Je suppose que la suite des $h_i$ soit d'ordre $\leqq (k_1, \rho_1)$ plus petit que l'ordre $(k, \rho) > (3, 0)$ de la suite des $g_i$, et je prends pour $g_i$ une valeur principale. On a $a_i = b_i c_i^{-1}$,

$$b_i \geqq g_i > e_k(i)^{\rho-\varepsilon}, \qquad c_i \leqq e_{k_1}(i)^{\rho_1+\varepsilon} e_{k_1}(i-1)^{i(\rho_1+\varepsilon)} < e_k(i)^{\rho-2\varepsilon};$$

---

([1]) C'est ici le lieu de rappeler que (LEGENDRE, *Éléments de Géométrie*, 9e édition, Paris, F. Didot, 1812, Note IV, p. 290, lemme I et O. STOLZ, *Allgemeine Arithmetik*, t. II, p. 297) K est irrationnel si, à partir d'une certaine valeur de $i$, $h_i \leqq g_i$. K est alors convergent, car, d'après (47), $a_i$ ou $a_{i-1}$ est $> 1$.

il suffit en effet, prenant $(k_1, \rho_1) \leqq (k, \rho - 4\varepsilon)$,

$$e_{k_1}(i-1)^{i(\rho_1+\varepsilon)} < e_k(i)^{\varepsilon}$$

pour $i$ assez grand, ce qui est une conséquence de (20 *bis*). Les cas limites où l'ordre des $g_i$ est $(k, \infty)$ avec $k \geqq 3$, ou même est infini se traitent sans difficulté. D'après les théorèmes I, IV et V :

Théorème IX. — *La fraction continue*

$$g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 + \ldots,$$

*où $g_0$ est rationnel $> 0$, et les $g_i$, $h_i$ sont entiers $> 0$, est un nombre transcendant de Liouville lorsque l'ordre de la suite des $g_i$ dans la première classification est $> (3, 0)$ et $>$ l'ordre de la suite des $h_i$ supposé plus petit que $+\infty$.*

*Deuxième classification.* — Je suppose l'ordre des $g_i$ plus grand que $(k, \rho) > (2, 1)$, et $(k, \rho) > (k_1, \rho_1)$ qui est plus grand que l'ordre des $h_i$ supposé non infini. On a, en prenant pour $g_i$ une valeur principale,

$$b_i \geqq g_i \geqq e_k(i^{\rho}), \qquad c_i < e_{k_1}(i^{\rho_1 - \eta})^i < e_{k_1}(i^{\rho_1})$$

($\eta$ comme $\varepsilon$), car il suffit

$$i e_{k_1-1}(i^{\rho_1-\eta}) < e_{k_1-1}(i^{\rho_1});$$

prenant $k_1 \geqq 2$, il suffit, quand $i$ est assez grand,

$$\log i + e_{k_1-2}(i^{\rho_1-\eta}) < 2\, e_{k_1-2}(i^{\rho_1-\eta}) < e_{k_1-2}(i^{\rho_1});$$

pour $k_1 = 2$, ceci a lieu; pour $k_1 > 2$, il suffit

$$\log 2 + e_{k_1-3}(i^{\rho_1-\eta}) < 2\, e_{k_1-3}(i^{\rho_1-n}) < e_{k_1-3}(i^{\rho_1}),$$

ce qui a lieu pour $k_1 = 3$, etc.

D'après les théorèmes III, IV et V, on conclut :

Théorème X. — *La fraction continue*

$$g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 + \ldots,$$

*où $g_0$ est rationnel, et les $g_i$, $h_i$ sont entiers, est un nombre transcendant de Liouville lorsque l'ordre de la suite des $g_i$ dans la deuxième classification est $>(2,1)$ et plus grand que l'ordre de la suite des $h_i$ supposé plus petit que $+\infty$.*

On pourrait encore chercher des exemples de fractions continues (44) qui sont des nombres transcendants de Liouville, sans que les deux théorèmes ci-dessus leur soient applicables, ou faire d'autres applications des théorèmes I à V et de leurs corollaires; mais je ne m'y arrête pas

Je dirai toutefois encore quelques mots du cas où (44) est périodique ou quasi-périodique.

On dira que K est périodique lorsque les suites des $g_i$ et des $h_i$ sont périodiques; si les deux périodes ont chacune $p$ et $q$ termes, soit $2r$ le plus petit commun multiple pair de $p$ et $q$; les deux suites admettent toutes deux une période de $2r$ termes. Alors

$$a_{i+2r} = g_{i+2r}\frac{h_{i+2r-1}h_{i+2r-3}\cdots}{h_{i+2r}h_{i+2r-2}\cdots} = a_i\lambda_i,$$

où $\lambda_i = \dfrac{h_{i+2r-1}h_{i+2r-3}\cdots h_{i+1}}{h_{i+2r}h_{i+2r-2}\cdots h_{i+2}}$; soient $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2r}$ les termes de la période des $h_n$; $h_{i+1}, h_{i+2}, \ldots, h_{i+2r}$ représentent ces termes dans l'ordre $\eta_j, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_{2r}, \eta_1, \ldots, \eta_{j-1}$ : $\lambda_i$ est ainsi susceptible des deux valeurs inverses l'une de l'autre

$$\lambda' = \frac{\eta_1\eta_3\cdots\eta_{2r-1}}{\eta_2\eta_4\cdots\eta_{2r}}, \qquad \lambda'' = \lambda'^{-1}.$$

Quand $\lambda' = \lambda'' = 1$, $a_{i+2r} = a_i$, et (45) est périodique : ce sera le cas en particulier quand $p$ et $q$ sont impairs, car les $g_i$ et les $h_i$ admettent une période de $r$ termes, où $r$ est impair $= 2s+1$, et

$$\eta_1 = \eta_{2s+2}, \qquad \eta_2 = \eta_{2s+3}, \ldots, \eta_{2s} = \eta_{4s+1}, \qquad \eta_{2s+1} = \eta_{4s+2} = \eta_{2r}.$$

La suite des $a_i$ et la fraction continue (45) ont alors une période de $2r$ termes.

On passe de là au cas où (44) est quasi-périodique, une infinité des

systèmes de périodes ayant tous dans leur période un nombre impair de termes : (45) est quasi-périodique [1]. On déduit de là le moyen d'appliquer les théorèmes VII et VIII et leurs corollaires aux fractions continues (44) : je ne m'y attarde pas.

---

(1) Sous certaines conditions évidentes relatives au nombre de termes de la partie non périodique des deux suites des $g_i$ et des $h_i$.

Bourg-la-Reine, mai 1907.

# *Formules relatives aux nombres de classes des formes quadratiques binaires et positives;*

PAR M. G. HUMBERT.

Hermite, dans sa *Lettre à Liouville* (¹) et dans un Mémoire ultérieur (²), a donné une méthode, relativement élémentaire, pour établir les résultats classiques de Kronecker sur les nombres de classes. La méthode d'Hermite repose sur les développements en séries trigonométriques de certains quotients de fonctions thêta; il m'a semblé que sa souplesse permettrait, non seulement de retrouver, comme l'a fait l'illustre géomètre, des formules déjà connues, mais d'en obtenir de nouvelles.

C'est à cette recherche qu'est consacré le présent Mémoire, divisé en deux Parties.

Dans un premier Chapitre, je rappelle ou j'établis les développements en séries de Fourier qui seront le plus fréquemment utilisés dans la suite.

Le second Chapitre apporte un complément direct soit aux formules initiales de Kronecker, soit à celles qu'il leur a ajoutées plus tard.

Le troisième se rapporte à des formules d'une nature différente, que

(¹) *Comptes rendus*, t. LIII; *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. VII; *Œuvres*, t. II, p. 109.

(²) *Comptes rendus*, t. LV; *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. IX; *Œuvres*, t. II, p. 242.

j'appelle *formules du type de Liouville*, parce que ce géomètre en a fait connaître, sans démonstration d'ailleurs, les premiers exemples.

Dans le quatrième Chapitre, je donne des relations où figurent, avec les nombres de classes, certaines représentations d'un entier par la forme $x^2 - 2y^2$ : c'est, je crois, la première fois qu'on voit apparaître une forme indéfinie dans les applications des fonctions elliptiques à l'Arithmétique. En particulier, je retrouve et j'établis un résultat indiqué par Stieltjes, sans aucune démonstration, dans sa correspondance avec Hermite.

Après un cinquième Chapitre, consacré à une digression arithmétique, le sixième Chapitre donne des formules où interviennent, à côté des nombres de classes, les minima des classes de même discriminant, ou les carrés de ces minima.

La deuxième Partie a trait tout entière aux applications de la transformation du troisième ordre, combinée avec la méthode d'Hermite.

J'y montre comment les formules établies dans la première Partie permettent, non seulement de démontrer, mais encore d'étendre, les relations entre les nombres de classes qui ont été déduites de la multiplication complexe de la fonction modulaire liée au tétraèdre; j'ajoute ensuite des relations d'un autre caractère, que je tire de développements nouveaux.

Je pourrai, dans un Mémoire ultérieur, apporter quelques compléments aux belles formules que M. Gierster a rattachées à la fonction de l'icosaèdre; mais je n'ose espérer que la méthode d'Hermite conduise à des relations telles que celles, si profondes et si générales, qu'a fait connaître M. Hurwitz, dans son étude des correspondances modulaires.

*Observation générale.* — Dans tout le Mémoire, je désignerai par $F(N)$ le nombre des classes binaires positives de discriminant $N$ et de l'ordre propre, c'est-à-dire où les deux coefficients extrêmes ne sont pas pairs tous deux; $F_1(N)$ sera le même nombre pour les classes de l'ordre impropre (où les deux coefficients extrêmes sont pairs). Il n'est rien supposé sur la *primitivité* des formes, c'est-à-dire qu'une classe de discriminant $N$, de l'ordre propre, et dont les coefficients ont un diviseur commun impair, compte pour une unité dans $F(N)$; de même

une classe de l'ordre impropre, dont les coefficients ont un diviseur commun quelconque, compte pour une unité dans $F_1(N)$.

Toutefois, selon les conventions ordinaires, dans F ou dans $F_1$, une classe équivalente à $a(x^2+y^2)$ compte pour $\frac{1}{2}$; dans $F_1$, une classe équivalente à $a(2x^2+2xy+2y^2)$ compte pour $\frac{1}{3}$.

On posera aussi

$$F(N)+F_1(N)=G(N),$$

de sorte que $G(N)$ est le nombre *total* des classes de discriminant N.

Toutes ces notations sont conformes à celles de Kronecker et d'Hermite; on fera également partout

$$F(0)=0; \qquad F_1(0)=-\tfrac{1}{12}.$$

On posera enfin, pour simplifier,

$$F(N)+3F_1(N)=J(N),$$
$$F(N)-3F_1(N)=I(N),$$
$$F(N)-\ F_1(N)=E(N),$$

et l'on aura

$$J(0)=-\tfrac{1}{4}, \qquad I(0)=\tfrac{1}{4}, \qquad E(0)=\tfrac{1}{12}.$$

---

# PREMIÈRE PARTIE.

---

## CHAPITRE I.

### PRINCIPAUX DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

**1**. *Notations adoptées.* — Pour rester en harmonie avec les premiers travaux d'Hermite, je poserai, en altérant légèrement les nota-

tions de Jacobi,

$$\Theta_1(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2} e^{2mix} = 1 + 2\sum_1 q^{m^2}\cos 2mx,$$

$$\Theta(x) = \sum_{-\infty} q^{m^2}(-1)^m e^{2mix} = 1 + 2\sum_1 q^{m^2}(-1)^m \cos 2mx,$$

$$\mathrm{H}_1(x) = \sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{(2m+1)ix} = 2\sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \cos(2m+1)x,$$

$$\mathrm{H}(x) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^m e^{(2m+1)ix} = 2\sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^m \sin(2m+1)x.$$

Je désignerai par $\theta_1$, $\theta$, $\eta_1$ les valeurs des trois premières fonctions pour $x = 0$; par $\eta'$ la quantité $\mathrm{H}'(0)$ :

$$\theta_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2}, \qquad \theta = \sum_{-\infty}(-1)^m q^{m^2}, \qquad \eta_1 = \sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}};$$

$$\eta' = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m(2m+1) q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} = 2\sum_0^{\infty}(-1)^m(2m+1) q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}.$$

On sait que $\eta' = \eta_1 \theta_1 \theta$.

Les relations quadratiques entre les quatre fonctions s'écrivent :

$$\theta^2 \mathrm{H}^2 + \theta_1^2 \mathrm{H}_1^2 - \eta_1^2 \Theta_1^2 = 0, \qquad \theta^2 \Theta^2 - \theta_1^2 \Theta_1^2 + \eta_1^2 \mathrm{H}_1^2 = 0,$$

$$\theta^2 \mathrm{H}_1^2 + \theta_1^2 \mathrm{H}^2 - \eta_1^2 \Theta^2 = 0, \qquad \theta^2 \Theta_1^2 - \theta_1^2 \Theta^2 + \eta_1^2 \mathrm{H}^2 = 0.$$

La troisième, pour $x = 0$, donne la formule classique $\theta_1^4 = \theta^4 + \eta_1^4$.

Rappelons aussi les formules

$$\Theta_1\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \Theta(x), \qquad \Theta\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \Theta_1(x),$$

$$\mathrm{H}_1\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{H}(x), \qquad \mathrm{H}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{H}_1(x),$$

et, si l'on pose

$$q = e^{i\pi\tau}, \qquad \lambda = e^{-ix} q^{-\frac{1}{4}},$$

les relations

$$\Theta_1\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)=\lambda \mathrm{H}_1(x), \qquad \mathrm{H}_1\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)=\lambda\Theta_1(x),$$

$$\Theta\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)=i\lambda \mathrm{H}(x), \qquad \mathrm{H}\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)=i\lambda\Theta(x).$$

Enfin, on a

$$\Theta_1(x,-q)=\Theta(x,q), \qquad \Theta(x,-q)=\Theta_1(x,q),$$

$$\mathrm{H}_1(x,-q)=\mathrm{H}_1(x,q)e^{\frac{i\pi}{4}}, \qquad \mathrm{H}(x,-q)=\mathrm{H}(x,q)e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

**2.** Les relations différentielles classiques s'écrivent :

$$\mathrm{H}'\Theta-\mathrm{H}\Theta'=\theta^2\mathrm{H}_1\Theta_1, \qquad \Theta'\mathrm{H}_1-\Theta\mathrm{H}_1'=\theta_1^2\Theta_1\mathrm{H},$$

$$\mathrm{H}'\mathrm{H}_1-\mathrm{H}\mathrm{H}_1'=\eta_1^2\Theta_1\Theta, \qquad \Theta'\Theta_1-\Theta\Theta_1'=\eta_1^2\mathrm{H}_1\mathrm{H},$$

$$\mathrm{H}'\Theta_1-\mathrm{H}\Theta_1'=\theta_1^2\mathrm{H}_1\Theta, \qquad \Theta_1'\mathrm{H}_1-\Theta_1\mathrm{H}_1'=\theta^2\Theta\mathrm{H}.$$

Si l'on désigne par $\theta_1''$, $\theta''$, $\eta_1''$ les valeurs des dérivées secondes de $\Theta_1$, $\Theta$, $\mathrm{H}_1$, pour $x=0$, c'est-à-dire

$$\theta_1''=-4\sum_{-\infty}^{+\infty}m^2q^{m^2}, \qquad \theta''=-4\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m m^2q^{m^2},$$

$$\eta_1''=-\sum_{-\infty}^{+\infty}(2m+1)^2q^{\frac{(2m+1)^2}{4}},$$

on déduit, des relations différentielles, les formules

$$\eta_1\theta_1''-\theta_1\eta_1''=\eta_1\theta_1\theta^4, \qquad \eta_1\theta''-\theta\eta_1''=\eta_1\theta\theta_1^4, \qquad \theta_1\theta''-\theta\theta_1''=\theta\theta_1\eta_1^4.$$

**3.** On trouvera, dans le second travail d'Hermite mentionné ci-dessus, les développements en séries de Fourier des quotients des quatre fonctions thêta prises deux à deux, ainsi que ceux des expressions telles que $\mathrm{H}\mathrm{H}_1:\Theta$, qui contiennent en dénominateur une de ces fonctions et en numérateur le produit de deux autres.

En dérivant les premiers développements, on obtient des formules

telles que celles-ci :

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\eta_1^2\theta_1\theta\frac{\mathrm{H}\mathrm{H}_1}{\Theta^2} = 4\sum_0^\infty 2m\frac{q^m}{1+q^{2m}}\sin 2mx,\\
&\eta_1^2\theta_1\theta\frac{\Theta\Theta_1}{\mathrm{H}^2} = \frac{1}{\sin^2 x}+4\sum_0 2m\frac{q^{2m}}{1+q^{2m}}\cos 2mx,\\
&\theta_1^2\eta_1\theta\frac{\mathrm{H}\Theta_1}{\Theta^2} = 4\sum_0(2m+1)\frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1+q^{2m+1}}\sin(2m+1)x,\\
&\theta_1^2\eta_1\theta\frac{\mathrm{H}\Theta_1}{\mathrm{H}_1^2} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}+4\sum_0(-1)^m(2m+1)\frac{q^{2m+1}}{1+q^{2m+1}}\sin(2m+1)x.
\end{aligned}
\right.
$$

Les autres formules du même type se déduisent de celles-là par les changements de $x$ en $x+\frac{\pi}{2}$, et de $q$ en $-q$.

4. On établit aisément, par la méthode indiquée plus bas (n° 5), les formules suivantes :

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\eta_1\theta_1\theta\frac{\mathrm{H}_1\Theta_1\mathrm{H}}{\Theta^2}\\
&\quad = 4\sum_1(-1)^{m+1}q^{m^2}\left[q^{-\frac{1}{4}}-3q^{-\frac{9}{4}}+\ldots+(-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\sin 2mx,\\
&\eta_1\theta_1\theta\frac{\mathrm{H}_1\Theta_1\Theta}{\mathrm{H}^2}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\\
&\quad = 4\sum_1(-1)^{m+1}q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left[q^{-\frac{1}{4}}+\ldots+(-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\cos(2m+1)x.
\end{aligned}
\right.
$$

En y changeant $x$ en $x+\frac{\pi}{2}$, on obtient les développements des deux autres expressions analogues

$$\eta_1\theta_1\theta\frac{\mathrm{H}\Theta\mathrm{H}_1}{\Theta_1^2} \qquad \text{et} \qquad \eta_1\theta_1\theta\frac{\mathrm{H}\Theta\Theta_1}{\mathrm{H}_1^2}.$$

5. *Démonstration de la formule fondamentale d'Hermite.* — Cette formule est celle qui donne le développement de $\mathrm{H}^2\Theta_1 : \Theta^2$.

Hermite l'indique sans démonstration; il est facile de l'établir par une méthode due à Liouville et utilisée par Biehler dans sa seconde Thèse ([1]).

On considère simultanément les deux fonctions $H^2\Theta_1 : \Theta^2$ et $\Theta^2 H_1 : H^2$, dont la seconde se déduit de la première, à un facteur exponentiel près, par le changement de $x$ en $x + \frac{\pi\tau}{2}$.

On a

$$\frac{H^2\Theta_1}{\Theta^2} = \sum_0^\infty A'_m \cos 2mx,$$

car le développement de Fourier peut se faire dans une bande parallèle à l'axe des quantités réelles, et dont les deux lignes frontières passent par les points $\frac{\pi\tau}{2}$ et $-\frac{\pi\tau}{2}$, zéros de $\Theta(x)$; de plus, la fonction à développer étant paire et ayant la période $\pi$, il ne figurera que des cosinus de multiples pairs de $x$.

La fonction paire $\Theta^2 H_1 : H^2$ devient infinie pour $x = 0$, le terme principal est $\frac{1}{x^2}\frac{\theta^2\eta_1}{\eta'^2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{x^2}\frac{1}{\eta_1\theta_1^2}$; il en résulte que la fonction

$$\frac{\Theta^2 H_1}{H^2} - \frac{1}{\eta_1\theta_1^2}\frac{1}{\operatorname{tang} x \sin x}$$

n'a pas de pôles dans la bande ci-dessus; comme c'est une fonction paire, changeant de signe quand on change $x$ en $x + \pi$, on aura

$$(\alpha) \qquad \eta_1\theta_1^2\frac{\Theta^2 H_1}{H^2} = \frac{1}{\operatorname{tang} x \sin x} + \sum_0 B_m \cos(2m+1)x$$

et, par ce qui précède,

$$(\beta) \qquad \eta_1\theta_1^2\frac{H^2\Theta_1}{\Theta^2} = \sum_0 A_m \cos 2mx.$$

([1]) *Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce.* Paris, Gauthier-Villars, 1879.

Changeons, dans $(\alpha)$, $x$ en $x+\frac{\pi\tau}{2}$, il vient

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{aligned} &\eta_1\theta_1^2\frac{H^2\Theta_1}{\Theta^2}e^{-ix}q^{-\frac14}=\frac{1}{\operatorname{tang}\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)\sin\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)}\\ &\qquad\qquad+\sum_0 B_m\cos(2m+1)\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right).\end{aligned}\right.$$

Or

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)}=i\,\frac{e^{i\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)}+e^{-i\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)}}{e^{i\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)}-e^{-i\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)}},$$

et, par $q=e^{i\pi\tau}$, on trouve aisément

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{tang}\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)\sin\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)}&=i\,\frac{qe^{2ix}+1}{qe^{2ix}-1}\left(\frac{-2i\sqrt{q}e^{ix}}{1-qe^{2ix}}\right)\\ &=-2\sqrt{q}\,e^{ix}(1+qe^{2ix})\\ &\quad\times[1+2qe^{2ix}+\ldots+(m+1)q^m e^{2mix}+\ldots].\end{aligned}$$

De même

$$B_m\cos(2m+1)\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)=\frac{B_m}{2}\left[e^{(2m+1)ix}q^{\frac{2m+1}{2}}+e^{-(2m+1)ix}q^{-\frac{(2m+1)}{2}}\right].$$

Portons ces valeurs au second membre de $(\gamma)$; dans le premier membre, remplaçons $\eta_1\theta_1^2H^2\Theta_1:\Theta^2$ par son développement $(\beta)$, et égalons les coefficients de $e^{(2m-1)ix}$ et $e^{-(2m-1)ix}$ dans les deux membres. Il vient

$$A_m q^{-\frac14}=-4\sqrt{q}(2m-1)\,q^{m-1}+B_{m-1}q^{\frac{2m-1}{2}},$$

$$A_{m-1}q^{\frac14}=B_{m-1}q^{-\frac{2m-1}{2}}.$$

Toutefois, si $m=1$, on a $A_0q^{-\frac14}=\frac12 B_0 q^{-\frac12}$.

L'élimination de $B_{m-1}$ donne la relation de récurrence :

$$(\delta)\qquad A_m=A_{m-1}q^{2m-1}-4(2m-1)q^{m-\frac14};$$

toutefois

$$(\varepsilon)\qquad A_1 = 2A_0 q - 4q^{1-\frac{1}{4}}.$$

Posons $A_m = \mathcal{A}_m q^{m^2}$; on a, dans ($\delta$) et ($\varepsilon$),

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_{m-1} - 4(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathcal{A}_1 = 2\mathcal{A}_0 - 4q^{-\frac{1}{4}}.$$

On en tire immédiatement

$$\mathcal{A}_m = 2\mathcal{A}_0 - 4\alpha_m,$$

étant posé

$$\alpha_m = q^{-\frac{1}{4}} + 3q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}.$$

De là résultent, par les valeurs de $A_m$ et $B_m$, les deux développements suivants, où l'on a remplacé $\mathcal{A}_0$ par $4\mathcal{A}$,

$$\frac{1}{4}\eta_1\theta_1^2\frac{H^2\Theta_1}{\Theta^2} = \mathcal{A}\Theta_1(x) - \sum_1^\infty q^{m^2}\alpha_m\cos 2mx,$$

$$\frac{1}{4}\eta_1\theta_1^2\frac{\Theta^2 H_1}{H^2} = \frac{\cos x}{4\sin^2 x} + \mathcal{A}H_1(x) - \sum_1^\infty q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\alpha_m\cos(2m+1)x.$$

La première de ces formules a été donnée par Hermite (*Lettre à Liouville*).

6. *Remarque.* — *A priori*, la méthode suivie devait laisser dans les développements un terme indéterminé. Car, en cherchant à développer $(H^2 + \mu\Theta^2)\Theta_1 : \Theta^2$ et $(\Theta^2 + \mu H^2)H_1 : H^2$, on est conduit exactement aux mêmes équations que ci-dessus pour les $A_m$ et les $B_m$, quelle que soit la constante $\mu$; donc, dans le développement de $H^2\Theta_1 : \Theta^2$, par exemple, il devait figurer un terme $\mathcal{A}\Theta_1$, dont la méthode ne pouvait donner le coefficient $\mathcal{A}$.

7. *Détermination de* $\mathcal{A}$. — C'est, dans la théorie d'Hermite, le

point fondamental où apparaît le nombre des classes. Nous présenterons le raisonnement d'Hermite de la manière suivante.

On a (Hermite, *Comptes rendus*, t. LV, et *Œuvres*, t. II, p. 242-244) les développements :

$$\frac{1}{4}\eta_1\theta_1\frac{H}{\Theta} = \sum_0^\infty \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}\sin(2m+1)x,$$

$$\theta_1\frac{H\Theta_1}{\Theta} = 2\sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(1+2q^{-1}+\ldots+2q^{-m^2})\sin(2m+1)x.$$

Multiplions membre à membre ces deux relations, et égalons, dans les deux membres nouveaux, développés en séries de Fourier, les termes indépendants de $x$.

Au premier membre, le terme cherché est $\mathcal{A}$; au second membre, en vertu de la formule $2\sin ax\sin bx = \cos(a-b)x - \cos(a+b)x$, ce sera la somme

$$\sum_0^\infty \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(1+2q^{-1}+\ldots+2q^{-m^2}).$$

On a ainsi

$$\mathcal{A} = \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{\mu=+m} q^{\frac{2m+1}{2}+\frac{(2m+1)^2}{4}-\mu^2}[1+q^{2m+1}+\ldots+q^{\rho(2m+1)}+\ldots].$$

Posons $\mathcal{A} = \sum q^{\frac{4N+3}{4}} f(4N+3)$, et cherchons à déterminer $f$; N est évidemment un entier variant de 0 à $+\infty$.

On a, en vertu de l'expression ci-dessus de $\mathcal{A}$, à poser

$$(E_1)\quad 4N+3 = (2m+1)^2 + 2(2m+1) + 4\rho(2m+1) - 4\mu^2$$

et $f(4N+3)$ est le nombre des solutions de l'équation $(E_1)$, avec les conditions $m \geqq 0$, $\rho \geqq 0$, $-m \leqq \mu \leqq m$.

Écrivons $(E_1)$

$$(E)\qquad 4N+3 = (2m+1)(2m+4\rho+3) - 4\mu^2$$

et considérons *la forme* $\varphi$ positive, et *de l'ordre propre,*

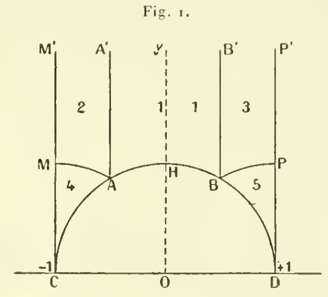
$$\varphi = (2m+1)x^2 + 4\mu xy + (2m+4\rho+3)y^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

dont le discriminant, par (E), est $4N+3$. On a, par ce qui précède,

(I) $\qquad c > a, \quad \text{mod}\, b < a, \quad b$ pair, $\quad a$ et $c$ impairs;

et il y a autant d'unités dans $f(4N+3)$ qu'il y a de formes positives $(a, b, c)$, de l'ordre propre, satisfaisant aux conditions (I), c'est-à-dire *de formes* $\varphi$.

Fig. 1.




Pour calculer ce nombre, partons de la division modulaire du plan : le point représentatif de la forme $(a, b, c)$ étant le point

$$\frac{-b + i\sqrt{ac - b^2}}{a},$$

les inégalités (I) établissent que, pour *une forme* $\varphi$, le point représentatif est dans l'une des régions 1, 2, 3, 4, 5, mais non sur l'arc CABD, ni sur les droites CM', DP'.

Soit maintenant $\varphi_0 = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ une forme *réduite* quelconque de l'ordre propre, de discriminant $4N+3$; son point représentatif est, comme on sait, *dans* la région 1, mais ne peut être sur son contour, car $\gamma = \alpha$, ou $2\beta = \pm\alpha$, avec $\alpha\gamma - \beta^2 = 4N+3$, donneraient $\gamma$ et $\alpha$ pairs, et $\varphi_0$ serait de l'ordre impropre.

La forme $\varphi_0$ (si $\beta \gtrless 0$) a une équivalente, et une seule, dont le point représentatif est soit *dans* 2, soit *dans* 3; à savoir :

$$\varphi_1 = \alpha x^2 + 2(\beta \pm \alpha)xy + (\gamma \pm 2\beta + \alpha)y^2;$$

de même elle a *une* équivalente, dont le point représentatif est *dans* 4 ou *dans* 5,

$$\varphi_2 = \gamma x^2 + 2(-\beta \pm \gamma)xy + (\gamma \mp 2\beta + \alpha)y^2;$$

les signes supérieurs et inférieurs se correspondent dans $\varphi_1$, comme dans $\varphi_2$ : si $\beta > 0$, il faut prendre dans $\varphi_1$ les signes inférieurs et dans $\varphi_2$ les supérieurs; ce sera l'inverse si $\beta < 0$.

Une et une seule des formes $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ est *une forme* $\varphi$, c'est-à-dire, puisque les *inégalités* (1) sont satisfaites pour toutes ces formes par la position même de leurs points représentatifs, qu'une et une seule de ces formes a son coefficient moyen pair, et ses extrêmes impairs.

C'est en effet :

$\varphi_0$ si $\alpha$ et $\gamma$ impairs, $\beta$ pair et $\gtreqless 0$;
$\varphi_1$ si $\alpha$ impair, $\beta$ impair, $\gamma$ pair;
$\varphi_2$ si $\gamma$ impair, $\beta$ impair, $\alpha$ pair.

Ce Tableau épuise toutes les parités possibles pour $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, à cause de la relation $\alpha\gamma - \beta^2 = 4N + 3$, et de l'hypothèse que $\alpha$ et $\gamma$ ne sont pas tous deux pairs (ordre propre).

Donc, enfin, il y a *autant de formes* $\varphi$ que de réduites de l'ordre propre, de discriminant $4N + 3$, en sorte qu'on trouve avec Hermite

$$f(4N+3) = F(4N+3),$$

$F(\Omega)$ désignant le nombre des classes de l'ordre propre de discriminant $\Omega$.

Donc, enfin,

$$\mathcal{A} = \sum_{N=0}^{\infty} q^{N+\frac{3}{4}} F(4N+3).$$

8. On traiterait de la même manière les fonctions analogues telles que $H^2 H_1 : \Theta^2$, $\Theta_1^2 H_1 : \Theta^2$, .... Pour cette dernière, la détermination du coefficient qui correspond à $\mathcal{A}$ est un peu plus difficile et revient aux calculs qu'a développés Hermite dans le paragraphe 3 de son second Mémoire (*Œuvres*, t. II, p. 248 et suiv.).

On obtient ainsi les *vingt-quatre formules* suivantes, qui se répartissent en trois groupes.

*Premier groupe.*

$$(3)\quad\begin{cases}\frac{1}{4}\eta_1\theta_1^2\frac{H^2\Theta_1}{\Theta^2} = & \mathcal{A}\Theta_1 - \sum_1^\infty q^{m^2}\alpha_m\cos 2mx,\\ \frac{1}{4}\eta_1\theta_1^2\frac{\Theta^2 H_1}{H^2} = \frac{\cos x}{4\sin^2 x} + \mathcal{A}H_1 - \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\alpha_m\cos(2m+1)x,\\ \frac{1}{4}\eta_1\theta_1^2\frac{H_1^2\Theta}{\Theta_1^2} = & \mathcal{A}\Theta - \sum_1 q^{m^2}\alpha_m(-1)^m\cos 2mx,\\ \frac{1}{4}\eta_1\theta_1^2\frac{\Theta_1^2 H}{H_1^2} = \frac{\sin x}{4\cos^2 x} + \mathcal{A}H - \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\alpha_m(-1)^m\sin(2m+1)x.\end{cases}$$

$$\alpha_m = q^{-\frac{1}{4}} + 3q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}},$$

$$\mathcal{A} = \sum_0 q^{N+\frac{3}{4}}F(4N+3).$$

Les deux dernières formules se déduisent des premières par le changement de $x$ en $x+\frac{\pi}{2}$.

Si maintenant on change $q$ en $-q$, on obtient les quatre formules

$$(4)\quad\begin{cases}\frac{1}{4}\eta_1\theta^2\frac{H^2\Theta}{\Theta_1^2} = & -\mathcal{A}'e^{\frac{i\pi}{4}}\Theta + \sum_1^\infty q^{m^2}\alpha_m(-1)^m\cos 2mx,\\ \frac{1}{4}\eta_1\theta^2\frac{\Theta_1^2 H_1}{H^2} = \frac{\cos x}{4\sin^2 x} + \mathcal{A}'e^{\frac{i\pi}{4}}H_1 - \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\alpha_m\cos(2m+1)x,\\ \frac{1}{4}\eta_1\theta^2\frac{H_1^2\Theta_1}{\Theta^2} = & -\mathcal{A}'e^{\frac{i\pi}{4}}\Theta_1 + \sum_1 q^{m^2}\alpha_m\cos 2mx,\\ \frac{1}{4}\eta_1\theta^2\frac{\Theta^2 H}{H_1^2} = \frac{\sin x}{4\cos^2 x} + \mathcal{A}'e^{\frac{i\pi}{4}}H - \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\alpha_m(-1)^m\sin(2m+1)x,\end{cases}$$

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}(-q) = \sum_0^\infty e^{\frac{3i\pi}{4}}(-1)^N q^{N+\frac{3}{4}}F(4N+3).$$

En ajoutant membre à membre les deux formules où les premiers membres ont $\Theta^2$ en dénominateur, on trouve

$$\frac{1}{4}\eta_1 \frac{\Theta_1}{\Theta^2}\left[\theta_1^2 \mathrm{H}^2 + \theta^2 \mathrm{H}_1^2\right] = \left(\mathcal{A} - \mathcal{A}' e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\Theta_1.$$

Mais $\theta_1^2 \mathrm{H}^2 + \theta^2 \mathrm{H}_1^2 = \eta_1^2 \Theta^2$ (n° **1**), de sorte qu'il reste

$$\mathcal{A} - \mathcal{A}' e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{4}\eta_1^3;$$

c'est la relation d'Hermite (*Lettre à Liouville*) :

$$\eta_1^3 = 8\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\frac{8\nu+3}{4}} \mathrm{F}(8\nu+3).$$

Joignons-y l'équation qui se déduit des expressions de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ :

$$\mathcal{A} + \mathcal{A}' e^{\frac{i\pi}{4}} = 2\sum_{0} q^{\frac{8\nu+7}{4}} \mathrm{F}(8\nu+7).$$

*Deuxième groupe.*

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{4}\eta_1^2\theta_1 \frac{\mathrm{H}^2\mathrm{H}_1}{\Theta^2} &= \phantom{\frac{1}{4\sin^2 x} +{}} \mathfrak{B}\mathrm{H}_1 - 2\sum_{1}^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta_m \cos(2m+1)x,\\
\frac{1}{4}\eta_1^2\theta_1 \frac{\Theta^2\Theta_1}{\mathrm{H}^2} &= \frac{1}{4\sin^2 x} + \mathfrak{B}\Theta_1 - 2\sum_{2} q^{m^2} \beta_{m-1} \cos 2mx,\\
\frac{1}{4}\eta_1^2\theta_1 \frac{\mathrm{H}_1^2\mathrm{H}}{\Theta_1^2} &= \phantom{\frac{1}{4\sin^2 x} +{}} \mathfrak{B}\mathrm{H} - 2\sum_{1} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^m \beta_m \sin(2m+1)x,\\
\frac{1}{4}\eta_1^2\theta_1 \frac{\Theta_1^2\Theta}{\mathrm{H}_1^2} &= \frac{1}{4\cos^2 x} + \mathfrak{B}\Theta - 2\sum_{2} q^{m^2} (-1)^m \beta_{m-1} \cos 2mx,
\end{aligned}\right.$$

$$\beta_m = q^{-1} + 2q^{-4} + \ldots + mq^{-m^2},$$

$$(6)\qquad \mathfrak{B} = \sum_{1} q^{\mathrm{N}} \mathrm{F}(4\mathrm{N}) = 2\sum_{1}^{\infty} q^{\mathrm{N}} \mathrm{F}(\mathrm{N}),$$

en comptant pour $\frac{1}{2}$ toute classe du type $a(x^2+y^2)$. Changeant $q$ en $-q$, on aurait quatre formules analogues, où figurerait $\mathfrak{B}(-q)$, que

nous désignerons par $\vartheta'$ :

$$\vartheta' = \vartheta(-q) = 2\sum_{1} (-1)^{\nu} q^{\nu} F(\nu).$$

*Troisième groupe.*

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{1}{4}\theta^2\theta_1 \frac{\Theta_1^2 H_1}{\Theta^2} = & \mathfrak{C} H_1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta_m \cos(2m+1)x, \\ \frac{1}{4}\theta^2\theta_1 \frac{H_1^2 \Theta_1}{H^2} = \frac{1}{4\sin^2 x} & - \mathfrak{C}\Theta_1 - 2\sum_{2} q^{m^2} \beta_{m-1} \cos 2mx, \\ \frac{1}{4}\theta^2\theta_1 \frac{\Theta^2 H}{\Theta_1^2} = & \mathfrak{C} H + 2\sum_{1} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^m \beta_m \sin(2m+1)x, \\ \frac{1}{4}\theta^2\theta_1 \frac{H^2\Theta}{H_1^2} = \frac{1}{4\cos^2 x} & - \mathfrak{C}\Theta - 2\sum_{2} q^{m^2} (-1)^m \beta_{m-1} \cos 2mx, \end{cases}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{4} + \sum_{1} q^{N} [F(N) - 3F_1(N)] = \sum_{0}^{\infty} q^{N} I(N).$$

Enfin, les quatre dernières formules se déduiraient des précédentes par changement de $q$ en $-q$.

9. *Remarque.* — En ajoutant membre à membre les premières formules des deuxième et troisième groupes, on trouve la relation

$$\vartheta + \mathfrak{C} = \frac{1}{4}\theta_1^3,$$

c'est-à-dire l'*équation de Kronecker* (¹) :

$$\theta_1^3 = 12\sum_{0} q^{N} [F(N) - F_1(N)],$$

qui donne le théorème classique sur les décompositions d'un entier en sommes de trois carrés, et d'où l'on déduit de suite les formules

(¹) *Crelle*, t. 57, p. 248; *Liouville*, 2ᵉ série, t. V, p. 289.

connues :

$$\eta_1\theta_1^2 = 4\sum_0 q^{N+\frac{1}{4}} F(4N+1), \qquad \eta_1^2\theta_1 = 4\sum_0 q^{N+\frac{1}{2}} F(4N+2).$$

Si l'on admet l'équation de Kronecker, les formules du troisième groupe se tirent immédiatement de celles du deuxième.

**10.** Hermite n'a fait connaître explicitement que la première formule du premier groupe; Kronecker a calculé la valeur de $\mathfrak{B}$, sans d'ailleurs donner *in extenso* aucune formule du second groupe (¹).

**11.** *Développements fondamentaux.* — En combinant les formules ci-dessus avec celles du n° **4**, et en appliquant les relations que fournit la transformation du second ordre, on arrive à de nouvelles formules qui joueront un *rôle fondamental* dans nos recherches.

Partons des deux développements

$$\frac{1}{4}\eta_1^2\theta\frac{H_1^2 H}{\Theta^2} = -\mathfrak{B}'H + 2\sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\beta'_m \sin(2m+1)x,$$

$$\frac{1}{4}\theta_1^2\theta\frac{\Theta_1^2 H}{\Theta^2} = \quad \mathfrak{C}'H + 2\sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\beta'_m \sin(2m+1)x,$$

qui se déduisent d'équations des second et troisième groupes par le changement de $q$ en $-q$; $\mathfrak{C}'$ est $\mathfrak{C}(-q)$, et $\beta'_m$ est $\beta_m(-q)$.

Il vient, en ajoutant membre à membre,

$$\theta\frac{H}{\Theta^2}\left[\theta_1^2\Theta_1^2 + \eta_1^2 H_1^2\right]$$
$$= 4(\mathfrak{C}' - \mathfrak{B}')H + 16\sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\beta'_m \sin(2m+1)x.$$

D'autre part, la première formule du n° **4** s'écrit

$$\theta\frac{H}{\Theta^2}2\theta_1\eta_1\Theta_1 H_1 = 8\sum_1 (-1)^{m+1} q^{m^2}$$
$$\times\left[q^{-\frac{1}{4}} - 3q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\sin 2mx$$

(¹) *Monatsberichte*, 26 mai 1862, p. 307.

et l'on en déduit, par addition, le développement de la fonction

$$\theta \frac{\mathrm{H}}{\Theta^2} (\theta_1 \Theta_1 + \eta_1 \mathrm{H}_1)^2,$$

qui est, en vertu des formules de la transformation d'ordre 2, la fonction

$$\theta \frac{\mathrm{H}(x, q)}{\Theta^2(x, q)} \Theta_1^4 \left(\frac{x}{2}, q^{\frac{1}{2}}\right).$$

Changeons maintenant $x$ en $2x$ et $q$ en $q^2$, cette fonction devient, en vertu des mêmes formules (*voir* ci-après n° **14**),

$$\theta^2(q^2) \frac{\mathrm{H}(x, q)\, \mathrm{H}_1(x, q)}{\Theta^2(x, q)\, \Theta_1^2(x, q)} \Theta_1^4(x, q), \quad \text{ou} \quad \theta\theta_1 \frac{\mathrm{H}\mathrm{H}_1}{\Theta^2} \Theta_1^2.$$

**12.** On a ainsi le développement

$$(8)\quad \begin{cases} \theta\theta_1 \mathrm{H}\mathrm{H}_1 \dfrac{\Theta_1^2}{\Theta^2} \\ \quad = 4[\mathcal{E}'(q^2) - \mathfrak{F}'(q^2)]\, \mathrm{H}(2x, q^2) \\ \qquad + 8 \sum\limits_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} [-2q^{-2} + \ldots + (-1)^m 2m q^{-2m^2}] \sin(4m+2)x \\ \qquad + 8 \sum\limits_1 (-1)^{m+1} q^{2m^2} \left[q^{-\frac{1}{2}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1) q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right] \sin 4mx. \end{cases}$$

On trouverait de même, ou par la méthode directe des n$^{\text{os}}$ **5**-**7**, la formule analogue

$$(6)\quad \begin{cases} \theta\theta_1 \Theta\Theta_1 \dfrac{\mathrm{H}_1^2}{\mathrm{H}^2} \\ \quad = \dfrac{1}{\sin^2 x} + 4[\mathfrak{F}'(q^2) - \mathcal{E}'(q^2)]\, \Theta(2x, q^2) \\ \qquad - 8 \sum\limits_2 (-1)^m q^{2m^2} [-2q^{-2} + \ldots + (-1)^m 2m q^{-2m^2}] \cos 4mx \\ \qquad - 8 \sum\limits_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \left[q^{-\frac{1}{2}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1) q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right] \cos(4m+2)x. \end{cases}$$

D'ailleurs on a

$$\mathfrak{B}'(q^2) - \mathfrak{C}'(q^2) = \sum_0 (-1)^N q^{2N} [F(N) + 3F_1(N)] = \sum_0^\infty (-1)^N q^{2N} J(N),$$

J(N) étant la fonction définie dans l'Introduction.

**13.** Enfin un procédé semblable donne les formules (10) et (11) :

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \eta_1 \theta_1 H_1 \Theta_1 \frac{H^2}{\Theta^2} = &\left[\mathfrak{A}(\sqrt{q}) + e^{\frac{i\pi}{4}} \mathfrak{A}'(\sqrt{q})\right] H_1(x, \sqrt{q}) \\ &- 4 \sum_1 q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \left[3 q^{-\frac{9}{8}} + \ldots + (4m-1) q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}}\right] \cos(4m+1)x \\ &- 4 \sum_0 q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \left[\ q^{-\frac{1}{8}} + \ldots + (4m+1) q^{-\frac{(4m+1)^2}{8}}\right] \cos(4m+3)x. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs on a

$$\mathfrak{A}(\sqrt{q}) + e^{\frac{i\pi}{4}} \mathfrak{A}'(\sqrt{q}) = 2 \sum_0^\infty q^{\frac{8N+7}{8}} F(8N+7).$$

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \eta_1 \theta_1 H_1 \Theta_1 \frac{\Theta^2}{H^2} = &\frac{\cos x}{\sin^2 x} + 2 H_1(x, \sqrt{q}) \sum_0 q^{\frac{8N+7}{8}} F(8N+7) \\ &- 4 \sum_1 q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \left[\ q^{-\frac{1}{8}} + \ldots + (4m-3) q^{-\frac{(4m-3)^2}{8}}\right] \cos(4m+1)x \\ &- 4 \sum_1 q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \left[3 q^{-\frac{9}{8}} + \ldots + (4m-1) q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}}\right] \cos(4m+3)x. \end{aligned} \right.$$

Les autres développements du même type se déduisent des précédents (n$^{os}$ **12** et **13**) par les changements de $x$ en $x + \frac{\pi}{2}$ et de $q$ en $-q$.

**14.** Nous réunirons ici, pour y renvoyer au besoin, les principales formules de la *transformation du second ordre*.

$$\Theta\Theta_1 = \theta(q^2)\Theta(2x, q^2), \qquad HH_1 = \theta(q^2)H(2x, q^2),$$
$$\Theta_1^2 + \Theta^2 = 2\theta_1(q^2)\Theta_1(2x, q^2), \qquad H_1^2 - H^2 = 2\theta_1(q^2)H_1(2x, q^2);$$

d'où

$$\theta\theta_1 = \theta^2(q^2), \qquad \eta_1^2 = 2\theta_1(q^2)\eta_1(q^2), \qquad \theta_1^2 + \theta^2 = 2\theta_1^2(q^2),$$

$$\mathrm{H}\Theta = \tfrac{1}{2}\eta_1(\sqrt{q})\mathrm{H}(x, \sqrt{q}), \qquad \mathrm{H}_1\Theta_1 = \tfrac{1}{2}\eta_1(\sqrt{q})\mathrm{H}_1(x, \sqrt{q}),$$

$$\Theta_1^2 + \mathrm{H}_1^2 = \theta_1(\sqrt{q})\Theta_1(x, \sqrt{q}), \qquad \Theta^2 + \mathrm{H}^2 = \theta_1(\sqrt{q})\Theta(x, \sqrt{q}),$$

$$e^{\frac{i\pi}{4}}\mathrm{H}\Theta_1 = \tfrac{1}{2}\eta_1(i\sqrt{q})\mathrm{H}(x, i\sqrt{q}), \qquad e^{\frac{i\pi}{4}}\mathrm{H}_1\Theta = \tfrac{1}{2}\eta_1(i\sqrt{q})\mathrm{H}_1(x, i\sqrt{q}).$$

## CHAPITRE II.

### FORMULES DES DEUX TYPES DE KRONECKER.

**15.** Kronecker a donné deux sortes de formules, dans lesquelles, aux premiers membres, figurent des sommes *algébriques* de nombres de classes. Dans les formules du premier type ([1]), qui sont au nombre de *huit*, les seconds membres contiennent des sommes de diviseurs réels; dans celles du deuxième type ([2]) interviennent des diviseurs complexes $a + bi$, c'est-à-dire des représentations par la forme $x^2 + y^2$. M. Hurwitz ([3]) a fait connaître des relations analogues, où apparaissent des diviseurs $a + bi\sqrt{2}$, c'est-à-dire des représentations par

$$x^2 + 2y^2.$$

Ce sont des formules nouvelles, se rattachant à ces deux types, que nous allons maintenant établir.

### Complément aux formules du premier type.

**16.** Nous n'avons obtenu qu'une seule formule de ce type.

On a (nos **5** et **14**) les développements

$$(12) \qquad \eta_1^2\theta_1\theta\frac{\mathrm{H}\mathrm{H}_1}{\Theta^2} = 8\sum_0^{\infty}\frac{mq^m}{1+q^{2m}}\sin 2mx,$$

([1]) *Crelle*, t. 57, p. 248; *Liouville*, 2e série, t. V, p. 289.

([2]) *Monatsberichte*, avril 1875.

([3]) *Crelle*, t. 99

et

$$(13)\qquad \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\eta_1(i\sqrt{q})}\mathrm{H}\Theta_1 = \sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\sin(2m+1)x.$$

Multiplions membre à membre, en observant (nº **14**) que

$$\eta_1^2(i\sqrt{q}) = 2\eta_1(-q)\theta_1(-q) = 2\eta_1\theta e^{\frac{i\pi}{4}};$$

le premier membre sera

$$(14)\qquad \frac{1}{2}\eta_1(i\sqrt{q})\eta_1\theta_1\mathrm{H}_1\Theta_1\frac{\mathrm{H}^2}{\Theta^2}e^{-\frac{i\pi}{8}},$$

c'est-à-dire, au facteur $\frac{1}{2}\eta_1(i\sqrt{q})e^{-\frac{i\pi}{8}}$ près, le premier membre de (10).

Donc, dans (14), en vertu de (10), le terme en $\cos x$ est

$$(15)\qquad 2e^{-\frac{i\pi}{8}}\eta_1(i\sqrt{q})q^{\frac{1}{8}}\sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{8}}\mathrm{F}(8\nu+7).$$

Ce terme est dès lors égal au terme en $\cos x$ obtenu par le produit des seconds membres de (12) et (13), et qu'on calcule immédiatement par la formule $2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$; on trouve ainsi l'expression

$$(16)\qquad 4\sum_0 \frac{mq^m}{1+q^{2m}}\left[q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} + q^{\frac{(2m-1)^2}{8}}(-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}\right].$$

L'égalité des quantités (15) et (16) conduit à la formule que nous avons en vue.

En effet, dans (15), cherchons le coefficient de $q^{\mathrm{N}+\frac{1}{8}}$, N étant nécessairement entier et positif. Il faut, à cet effet, poser

$$8\mathrm{N}+1 = 8\nu+7+(2x+1)^2+1 \qquad (x \gtrless 0)$$

et le coefficient cherché est

$$2\sum_{x\gtrless 0}(-1)^{\frac{x(x+1)}{2}}\mathrm{F}[8\mathrm{N}-(2x+1)^2].$$

Pour avoir le coefficient de $q^{N+\frac{1}{8}}$ dans (16), il faut poser

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &8N+1 = 8m + (2m+1)^2 + 16m\rho,\\ &\text{c'est-à-dire}\\ &2N = m(m+4\rho+3), \qquad (m, \rho \geqq 0) \end{aligned}\right.$$

et

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &(8N+1) = 8m' + (2m'-1)^2 + 16m'\rho',\\ &\text{c'est-à-dire}\\ &2N = m'(m'+4\rho'+1); \qquad (m', \rho' \geqq 0) \end{aligned}\right.$$

et le coefficient cherché est

$$4\sum m(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}+\rho} + 4\sum m'(-1)^{\frac{(m'-1)(m'-2)}{2}+\rho'}.$$

On reconnaît sans difficulté, à l'aide de (17) et de (18), que cette expression est égale à la somme

$$-4\sum \delta(-1)^{\frac{(\delta_1+\delta)^2-1}{8}}$$

étendue aux décompositions $2N = \delta\delta_1$, où $\delta < \delta_1$; $\delta$ et $\delta_1$ étant positifs et de parités différentes. *De là, la formule finale*

$$(19)\qquad \sum_{x \geqq 0} \left(\frac{2}{2x+1}\right) F[8N-(2x+1)^2] = -\sum \delta\left(\frac{2}{\delta_1+\delta}\right),$$

où l'on a introduit le symbole, $\left(\frac{2}{a}\right)$, de Jacobi; la somme, au premier membre, porte sur les valeurs positives entières de $x$, à partir de 0, telles que $8N-(2x+1)^2$ ne soit pas négatif; la somme, au second membre, s'étend à toutes les décompositions en facteurs $2N = \delta\delta_1$, $\delta$ et $\delta_1$ n'étant pas de même parité, et $\delta$ étant inférieur à $\delta_1$.

**17.** *Remarques.* — 1° La formule (19) ne paraît pas rentrer dans les formules classiques I-VIII du premier type de Kronecker.

2° Si l'on partait des développements (n°s **5** et **14**) de $H\Theta_1 : \Theta^2$ et de $H_1\Theta_1$, en utilisant alors l'équation (8), au lieu de l'équation (10),

on obtiendrait de même une relation où figure la fonction J, et qui coïncide, aux notations près, avec la formule VIII de Kronecker.

Notre formule (19) se présente donc comme l'analogue de celle-ci.

### Nouvelles formules du second type.

**18.** Les développements en série qui vont nous servir sont ceux de fonctions telles que $H'H_1 : \Theta$.

Partons de la formule d'Hermite [1]

$$\frac{1}{4}\eta_1 \frac{HH_1}{\Theta} = \sum q^{m^2}\left(q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right)\sin 2mx;$$

et dérivons les deux membres par rapport à $x$.

Au premier membre, en tenant compte des relations différentielles du n° **2**, on trouve

$$\frac{1}{4}\frac{\eta_1}{\Theta^2}(H'H_1\Theta - \theta_1^2\Theta_1 H^2),$$

d'où l'on tire, en utilisant la première formule (3), la relation

$$(20)\quad \frac{1}{4}\eta_1 \frac{H'H_1}{\Theta} = \mathcal{A}\Theta_1 + \sum_1^{\infty} q^{m^2}\left[(2m-1)q^{-\frac{1}{4}} + (2m-3)q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\cos 2mx.$$

On trouverait de même

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{4}\eta_1 \frac{\Theta'_1\Theta}{H} &= e^{\frac{i\pi}{4}}\mathcal{A}'H_1 + 2\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \\ &\quad\times\left[mq^{-\frac{1}{4}} + (m-1)q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\cos(2m+1)x, \end{aligned}\right.$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{4}\theta_1 \frac{H'\Theta_1}{\Theta} &= \mathfrak{B}H_1 + \frac{1}{2}q^{\frac{1}{4}}\cos x + \frac{1}{2}\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \\ &\quad\times\left[2m+1+2(2m-1)q^{-1}+2(2m-3)q^{-4}+\ldots+2q^{-m^2}\right]\cos(2m+1)x, \end{aligned}\right.$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. LV, p. 11; *Œuvres*, t. II, p. 244.

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{4}\theta_1\frac{\Theta' \mathrm{H}_1}{\mathrm{H}} = \mathfrak{B}\,\Theta_1 + q\cos 2x + 2\sum_1 q^{(m+1)^2} \\ &\quad\times\left[\frac{m+1}{2} + mq^{-1} + (m-1)q^{-4} + \ldots + q^{-m^2}\right]\cos(2m+2)x. \end{aligned}\right.$$

**19.** Cela posé, faisons $x = \frac{\pi}{4}$ dans les formules (20) à (23). On trouve directement, et en utilisant ensuite les formules du n° **14**,

$$(24)\quad \Theta_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \Theta\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{-\infty}(-1)^m q^{4m^2} = \theta(q^4) = \sqrt{\theta(q^2)\theta_1(q^2)},$$

$$(25)\quad \mathrm{H}_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{H}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\pi}{8}}\eta_1(qi) = \sqrt{\theta(q^2)\eta_1(q^2)}.$$

Dès lors, la substitution $x = \frac{\pi}{4}$ faite dans (21), par exemple, donne, au premier membre,

$$\frac{1}{4}\eta_1\Theta_1'\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{\theta_1(q^2)}}{\sqrt{\eta_1(q^2)}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{1}{4}\Theta_1'\left(\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}\,\theta_1(q^2).$$

On a ainsi, en remplaçant $\Theta_1'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ par son développement, la relation :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{-\infty} q^{(2n+1)^2}(2n+1)(-1)^n \times \sum_{-\infty} q^{2m^2} \\ &= \sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \times \sum_0 q^{\frac{4\nu+3}{4}}(-1)^\nu \mathrm{F}(4\nu+3) \\ &\quad - 2\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}\left[mq^{-\frac{1}{4}} + (m-1)q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]. \end{aligned}\right.$$

Égalons les coefficients de $q^{\mathrm{N}}$ dans les deux membres de (26) :

1° N *pair*. Il n'y a pas de terme en $q^{\mathrm{N}}$ au premier membre ; au second membre, si l'on pose $\mathrm{N} = 2\mathrm{N}'$, ce terme a pour coefficient, comme le donne un calcul facile,

$$-\sum_{m=0}\mathrm{F}[8\mathrm{N}' - (2m+1)^2](-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} - 2\sum \delta(-1)^{\frac{(\delta+\delta_1)^2-1}{8}},$$

la seconde somme s'étendant aux décompositions en facteurs $2N = \delta\delta_1$, où $\delta_1$ et $\delta$ sont de parités contraires, et $\delta_1 > \delta$. On retrouve ainsi la formule (19).

2° N *impair;* $N = 2N' + 1$. — En ce cas, il n'y a pas de terme en $q^N$ dans la somme $\sum_1$ qui figure au second membre de (26).

Au premier membre, pour avoir le terme en $q^N$, posons

$$2N' + 1 = (2n + 1)^2 + 2m^2, \qquad (m, n \geqq 0);$$

le coefficient cherché sera $\sum(-1)^n(2n+1)$. De là, *la formule nouvelle, à placer à côté de* (19),

$$(27) \quad \sum_{m \geqq 0}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} F[8N' + 4 - (2m+1)^2] = \sum(-1)^{\frac{a-1}{2}} a,$$

la somme, au second membre, portant sur les décompositions

$$2N' + 1 = a^2 + 2b^2 \qquad (a > 0, b \geqq 0).$$

**20.** En opérant de même sur le développement (20), on obtiendrait la formule VII de Kronecker, et un cas particulier d'une formule due à M. Hurwitz [1].

**21.** Le développement (22) conduit à *une seule formule, qui est nouvelle,*

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2\sum_{m \geqq 0}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} F[4N + 1 - (2m+1)^2] \\ & \qquad = \sum\left(\frac{-2}{a}\right) a - 2\sum d \left(\frac{2}{\frac{d+d_1}{2}}\right). \end{aligned} \right.$$

Au second membre, la première somme porte sur les décompositions

$$4N + 1 = a^2 + 4b^2, \qquad (a > 0, b \geqq 0);$$

---

[1] *Crelle*, t. 99.

la seconde sur les décompositions en facteurs $4N+1 = d_1 d$, avec $d_1 < d$. Toutefois, si $4N+1$ est un carré parfait $\delta^2$, le terme $-2\delta\left(\frac{2}{\delta}\right)$ devra être divisé par 2 (1), c'est-à-dire être remplacé par $-\delta\left(\frac{2}{\delta}\right)$.

**22.** Le développement (23) ne donne que des résultats connus.

**23.** *Une autre méthode*, pour obtenir des relations du second type de Kronecker, consiste à poser $x = \frac{\pi\tau}{4}$ dans les équations (20) à (23).

Si dans la relation $\Theta_1\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right) = e^{-ix} q^{-\frac{1}{4}} \mathrm{H}_1(x)$, on fait $x = -\frac{\pi\tau}{4}$, on trouve

$$\Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = \mathrm{H}_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right);$$

et, de même,

$$\mathrm{H}\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = i\Theta\left(\frac{\pi\tau}{4}\right).$$

Si l'on remplace $x$ par $\frac{\pi\tau}{4}$ dans les relations quadratiques entre les quatre fonctions thêta, on trouve aisément

$$\Theta\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) : \Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = \theta\left(q^{\frac{1}{2}}\right) : \theta(q).$$

Enfin, on a directement

$$\Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2} e^{2mi\pi\frac{\tau}{4}} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2+\frac{m}{2}} = q^{-\frac{1}{16}} \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{(4m+1)^2}{16}},$$

d'où

$$\Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = \frac{1}{2} q^{-\frac{1}{16}} \eta_1\left(q^{\frac{1}{4}}\right).$$

Ces formules donnent les valeurs des quatre fonctions thêta pour $x = \frac{\pi\tau}{4}$.

---

(1) Cela provient de ce que, dans le crochet qui figure au second membre de (22), le premier terme est $2m+1$ et non $2(2m+1)$ comme l'exigerait l'analogie avec les termes suivants.

**24.** Faisons $x = \frac{\pi\tau}{4}$ dans l'équation, déduite de (20) par le changement de $q$ en $-q$,

$$-\frac{1}{4}\eta_1\frac{H'H_1}{\Theta_1}$$
$$= e^{\frac{i\pi}{4}}\mathcal{A}'\Theta + \sum_1 (-1)^m q^{m^2}\Big[(2m-1)q^{-\frac{1}{4}} + \ldots$$
$$+ (2m-2\mu+1)q^{-\frac{(2\mu-1)^2}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\Big]\cos 2mx.$$

Il vient, au premier membre,

$$\frac{1}{4}\sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \times \sum_{-\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}+\frac{2n+1}{4}}(-1)^n(2n+1),$$

et au second

$$\sum_0 q^{\nu+\frac{3}{4}}(-1)^\nu F(4\nu+3) \times \sum_{\infty} q^{m^2+\frac{m}{2}}(-1)^m$$
$$-\sum_1 (-1)^m q^{m^2}\frac{q^{\frac{m}{2}}+q^{-\frac{m}{2}}}{2}\Big[(2m-1)q^{-\frac{1}{4}} + \ldots$$
$$+ (2m-2\mu+1)q^{-\frac{(2\mu-1)^2}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\Big].$$

Égalons, dans les deux membres, les coefficients de $q^{\frac{2N+1}{4}}$, en distinguant les cas de $N = 2M$ et $N = 2M+1$.

Si $N = 2M$, le coefficient cherché est, au premier membre, la somme

$$(29) \qquad \frac{1}{4}\sum(2n+1)(-1)^n,$$

étendue aux décompositions $16M + 5 = (4n+3)^2 + 4(2m+1)^2$, avec $m, n \gtrless 0$. Cette formule exige que $n$ soit impair, donc $(-1)^n = -1$.

Au second membre, le coefficient de $q^{\frac{4M+1}{4}}$ se compose des trois

sommes

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum_{m'\geqq 0} F\left(\frac{16M+5-(8m'+5)^2}{4}\right)(-1)^{M-m'-1}\\ &\quad+\frac{1}{4}\sum(\delta-1)+\frac{1}{4}\sum(\delta'+1),\end{aligned}\right.$$

$\delta$ désignant tout diviseur de $16M+5$ inférieur à son conjugué ([1]) et du type $4h+3$; $\delta'$ tout diviseur de $16M+5$ inférieur à son conjugué et du type $4h+1$.

L'égalité des expressions (29) et (30) donne la formule cherchée; on la simplifie en observant que

$$\frac{1}{4}\sum(\delta-1)+\frac{1}{4}\sum(\delta'+1)=\frac{1}{4}\sum(\delta+\delta')+\frac{1}{4}A,$$

A étant la différence entre le nombre des décompositions

$$16M+5=\delta'\delta'_1 \qquad \text{où} \qquad \delta'\equiv\delta'_1\equiv 1 \pmod 4,$$

et celui des décompositions

$$16M+5=\delta\delta_1 \qquad \text{où} \qquad \delta\equiv\delta_1\equiv 3 \pmod 4.$$

Sous une autre forme, par un résultat classique, A est le *quart* du nombre des décompositions

$$(31)\qquad 16M+5=a^2+b^2,$$

$a$, $b \gtrless 0$, *a impair*, *b pair* ($b$ est nécessairement impairement pair).

D'ailleurs $a$ ou $-a$, soit $\varepsilon a$, est du type $4n+3$; et la décomposition considérée ci-dessus

$$16M+5=(4n+3)^2+4(2m+1)^2$$

donne

$$\varepsilon a=4n+3, \qquad \text{d'où} \qquad 2n+1=\tfrac{1}{2}(\varepsilon a-1).$$

---

([1]) Si $A=\delta\delta_1$, les diviseurs $\delta$ et $\delta_1$ sont dits *conjugués*.

Dès lors, la somme (29) s'écrit

$$\frac{1}{4}\sum(2n+1) = -\frac{1}{8}\sum\varepsilon a + \frac{1}{8}B,$$

B étant le nombre des $\varepsilon a$, c'est-à-dire la *moitié* du nombre des décompositions (31), nombre qui est 4A, de sorte que $\frac{1}{8}$B est $\frac{1}{4}$A.

Ainsi le terme $\frac{1}{4}$A figure à la fois dans (29) et (30) et se détruit; il reste alors, si l'on observe que $F(4\Omega) = 2F(\Omega)$, la formule

$$2(-1)^{M}\sum_{m \gtreqless 0}(-1)^{m}F[16M+5-(8m+5)^{2}] = \sum d + \frac{1}{2}\sum a,$$

$d$ désignant tout diviseur de $16M+5$ inférieur à son conjugué, et $\sum a$ s'étendant aux décompositions $16M+5 = a^{2}+b^{2}$, où $a, b \gtreqless 0$, $b$ pair, $a$ impair et $\equiv 3 \pmod 4$.

**25.** On aurait une formule analogue en supposant $N = 2M+1$; *les deux formules se réunissent en une seule :*

$$2(-1)^{M}\sum_{m \gtreqless 0}(-1)^{m}F[16M+8h+5-(8m-4h+5)^{2}]$$
$$= \sum d - \sum\left(\frac{-1}{a}\right)a.$$

Dans cette formule, $h$ est soit 0, soit 1, à volonté; $d$ désigne tout diviseur de $16M+8h+5$, inférieur à son conjugué; la dernière somme, enfin, s'étend aux décompositions

$$16M+8h+5 = a^{2}+b^{2},$$

avec $a, b > 0$, $a$ impair, $b$ pair.

**26.** En faisant $x = \frac{\pi\tau}{4}$ dans la relation qu'on déduit de (22) par

changement de $q$ en $-q$, *on obtient la double formule*

$$2(-1)^{M}\sum_{m\lesseqgtr 0}(-1)^{m}F[16M+8h+1-(8m+4h+1)^2]$$
$$=-\sum d\left(\frac{2}{d}\right)+\frac{1}{2}\sum\left(\frac{-1}{a}\right)a,$$

$h$ est à volonté 0 ou 1; $d$ désigne tout diviseur de $16M+8h+1$, inférieur ou égal à son conjugué; la dernière somme enfin s'étend aux décompositions

$$16M+8h+1=a^2+2b^2,$$

avec $a>0$, $b \gtrless 0$.

Toutefois, si $16M+8h+1$ est un carré $\delta^2$, on divise par 2, au second membre, le terme $-\delta\left(\frac{2}{\delta}\right)$.

**27**. Nous n'insisterons pas davantage sur les formules qu'on obtiendrait par ce procédé, préférant aborder des relations d'un caractère plus nouveau.

## CHAPITRE III.

### FORMULES DES DEUX TYPES DE LIOUVILLE.

**28**. Liouville a indiqué une intéressante formule (¹) où le premier membre est

$$\sum(-1)^{m}(2m+1)F[8N+4-(2m+1)^2],$$

et où le second membre dépend des décompositions de $8N+4$ en deux carrés. Stieltjes a donné (²) la démonstration de la formule de Liou-

(¹) *Liouville*, 2ᵉ série, t. XIV, p. 1.

(²) *Comptes rendus*, 10 décembre 1883; *Correspondance avec Hermite*, t. I, p. 66.

ville et en a établi d'analogues [1], où figurent, sous le signe F, des expressions telles que $A - 2(2m+1)^2$, ou $A - 3(2m+1)^2$.

Dans l'ordre d'idées de Liouville, j'ai obtenu les résultats qui suivent.

**29.** *Formules nouvelles du premier type de Liouville.* — Dans la formule (22), changeons $x$ en $x + \frac{\pi}{2}$, il vient

$$\theta_1 \frac{H'_1 \Theta}{\Theta_1} = -4\vartheta H - 2\sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^m$$
$$\times [2m+1+\ldots+2(2m+1-2\mu)q^{-\mu^2}+\ldots+2q^{-m^2}]\sin(2m+1)x.$$

Égalons les valeurs principales des deux membres pour $x = 0$. On a

$$\eta''_1\theta = -4\vartheta\eta' - 2\sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^m(2m+1)[2m+1+\ldots+2q^{-m^2}];$$

remplaçons $\eta''_1$ et $\eta'$ par leurs valeurs (n^os **2** et **1**), et écrivons que les coefficients de $q^{N+\frac{1}{4}}$ sont les mêmes dans les deux membres, nous obtenons la relation nouvelle :

$$4\sum_{m=0}(-1)^m(2m+1)F[4N+1-(2m+1)^2]$$
$$= -\sum d(d_1+d)(-1)^{\frac{d_1+d-2}{4}} + (-1)^N \sum a^2.$$

La première somme, au second membre, s'étend aux décompositions $4N+1 = d_1 d$, où $d_1 \geqq d$; la deuxième aux décompositions

(32) $$4N+1 = a^2+4b^2, \qquad (a>0,\ b \gtrless 0).$$

On peut simplifier la formule, en observant que

$$(-1)^{\frac{d_1+d-2}{4}} = (-1)^{N+\frac{d-1}{2}};$$

[1] *Comptes rendus*, 17 décembre 1883.

on a alors au second membre le terme $-\sum dd_1(-1)^{N+\frac{d-1}{2}}$, c'est-à-dire

$$-(-1)^N N \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

et, comme le dernier $\sum$ est la moitié du nombre des décompositions (32), il est évident que

$$-(-1)^N N \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} = -\frac{1}{2}(-1)^N \sum (a^2+4b^2).$$

*Notre formule prend ainsi la forme définitive :*

$$8(-1)^N \sum_{m \geqq 0} (-1)^m (2m+1) F[4N+1-(2m+1)^2]$$
$$= -2\sum \left(\frac{-1}{d}\right) d^2 + \sum (a^2-4b^2),$$

la signification des sommes, au second membre, ayant été indiquée plus haut.

Toutefois, si $4N+1$ est un carré $\delta^2$, on divisera par 2 le terme $-2\left(\frac{-1}{\delta}\right)\delta^2$ du second membre.

**50.** *Remarque.* — En changeant $x$ en $x+\frac{\pi}{2}$ dans (21), et égalant les valeurs principales des deux membres pour $x=0$, on trouverait la formule même de Liouville.

**51.** *Suite des formules du premier type de Liouville.* — On a

$$\eta_1 \frac{\Theta' H_1 H}{\Theta^2} = \eta_1 \frac{H_1}{\Theta^2}(H'\Theta - \theta^2 \Theta_1 H_1) = \eta_1 \frac{H' H_1}{\Theta} - \eta_1 \theta^2 \frac{H_1^2 \Theta_1}{\Theta^2},$$

et, par (20), (4) et les expressions de $\mathcal{A}$ et $-\mathcal{A}' e^{\frac{i\pi}{4}}$ (n° 8),

$$\eta_1 \frac{\Theta' H H_1}{\Theta^2} = 8\Theta_1 \sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{4}} F(8\nu+7) + 8\sum_1 q^{m^2}$$
$$\times\left[(m-1)q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + (m-2\mu+1)q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} + \ldots + (-m+1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\cos 2mx.$$

D'autre part [n° 3, (1)],

$$\eta_1^2 \theta_1 \theta \frac{\mathrm{H}\mathrm{H}_1}{\Theta^2} = 8 \sum_0 \frac{mq^m}{1+q^{2m}} \sin 2mx$$

et l'on a

$$\Theta' = 4 \sum_0 mq^{m^2} (-1)^{m+1} \sin 2mx.$$

Effectuons le produit membre à membre de ces deux dernières relations; le terme indépendant de $x$, au premier membre, sera, par la formule du bas de la page précédente,

$$(33) \qquad 8\eta_1 \theta_1 \theta \sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{4}} \mathrm{F}(8\nu+7);$$

au second membre, ce sera

$$(34) \qquad 16 \sum_0 m^2 \frac{q^{m^2+m}}{1+q^{2m}} (-1)^{m+1}.$$

Remplaçons $\eta_1 \theta_1 \theta$ par $\eta'$, et égalons les coefficients de $q^{2\mathrm{N}}$ dans (33) et (34), nous arrivons immédiatement *à la formule :*

$$(35) \quad \sum_{m \geqq 0} (-1)^m (2m+1) \mathrm{F}[8\mathrm{N} - (2m+1)^2] = \sum \delta^2 (-1)^{\frac{\delta_1+\delta+1}{2}}.$$

La somme, au second membre, s'étend aux décompositions, déjà rencontrées au n° **16**, $2\mathrm{N} = \delta\delta_1$, où $\delta < \delta_1$ et $\delta$, $\delta_1$ de parités différentes.

**32.** On trouve de même, en utilisant (22) et la première relation (7), le développement

$$\theta_1 \Theta' \frac{\mathrm{H}\Theta_1}{\Theta^2} = 4(\mathfrak{P} - \mathfrak{S})\mathrm{H}_1 + 2q^{\frac{1}{4}} \cos x + 2 \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \omega_m \cos(2m+1)x,$$

où l'on a posé,

$$\omega_m = 2m + 1 + \ldots + (4m - 8\mu + 2) q^{-\mu^2} + \ldots + (-4m+2) q^{-m^2}.$$

Maintenant, si l'on multiplie membre à membre les développements (n° **5**) de $\theta_1^2\eta_1\theta\,\mathrm{H}\Theta_1 : \Theta^2$ et de $\Theta'$, et si l'on égale dans les deux membres nouveaux les termes en $\cos x$, on arrive à la *formule simple*

$$(36)\quad 2(-1)^{\mathrm{N}}\sum_{m\geqq 0}(-1)^m(2m+1)\mathrm{J}\left(\frac{4\mathrm{N}+1-(2m+1)^2}{4}\right) = -\sum\left(\frac{-1}{d}\right)d^2,$$

$d$ désignant tout diviseur de $4\mathrm{N}+1$ inférieur ou égal à son conjugué. Toutefois, si $4\mathrm{N}+1=\delta^2$, le terme du second membre qui correspond à $\delta$ devra être divisé par 2.

Les formules (35) et (36) sont remarquables en ce sens qu'il ne figure, dans les seconds membres, que des diviseurs réels.

**33.** *Second type de Liouville.* — Liouville, toujours sans démonstration, a fait connaître une formule ([1]) où le premier membre est

$$\sum(2m+1)^2\mathrm{F}[4\mathrm{N}-(2m+1)^2],$$

le second membre s'exprimant à l'aide des diviseurs de N. Nous retrouverons cette formule plus bas; nous en établirons d'abord d'autres, plus élégantes, qui donnent d'une manière générale les sommes

$$\sum m^2\mathrm{F}(\mathrm{N}-m^2) \quad \text{et} \quad \sum m^2\mathrm{F}_1(\mathrm{N}-m^2).$$

**34.** *Formules du second type.* — Partons de la relation qu'on déduit de (9), (n° **12**), en changeant $x$ en $x+\frac{\pi}{2}$, à savoir :

$$\begin{aligned}\theta\theta_1\frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{H}_1^2}\Theta\Theta_1 &= \frac{1}{\cos^2 x} + 4\Theta(2x, q^2)\sum_0(-1)^\nu q^{2\nu}\mathrm{J}(\nu)\\ &\quad -8\sum_2(-1)^m q^{2m^2}\left[-2q^{-2}+\ldots+(-1)^m 2mq^{-2m^2}\right]\cos 4mx,\\ &\quad +8\sum_1(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left[q^{-\frac{1}{2}}+\ldots+(-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right]\cos(4m+2)x\end{aligned}$$

---

([1]) *Journal de Liouville*, 2e série, t. XII, p. 99.

et égalons les coefficients des termes en $x^2$ dans les deux membres.

*Au premier membre*, le coefficient de $x^2$ est

$$\theta\theta_1 \frac{\eta_1^2 \theta_1^2 \theta^2}{\eta_1^2} \theta\theta_1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \theta^4 \theta_1^4, \quad \text{ou} \quad \theta^8(q^2),$$

et l'on a évidemment

$$(37) \qquad \theta^8(q^2) = 1 + \sum_1 q^{2N}(-1)^N \varphi(N),$$

$\varphi(N)$ étant le nombre de décompositions de N en somme de huit carrés (à racines positives, négatives ou nulles, et l'ordre des carrés entrant en compte).

Il est bien connu d'ailleurs que

$$\varphi(2M+1) = 16 \sum \delta^3, \qquad \varphi(2M) = 16 \left[ \sum \delta_p^3 - \sum \delta_i^3 \right],$$

$\delta$ désignant tout diviseur de $2M+1$; $\delta_p$ (et $\delta_i$) tout diviseur pair (et impair) de $2M$.

*Au second membre*, le coefficient de $x^2$ est

$$(38) \left\{ \begin{aligned} & 1 + 4 \sum_0 (-1)^\nu q^{2\nu} J(\nu) \times \sum_0 -16 m^2 q^{2m^2} (-1)^m \\ & + 16 \sum_2 (-1)^m q^{2m^2} 4 m^2 [-2 q^{-2} + \ldots + (-1)^m 2 m q^{-2m^2}] \\ & - 16 \sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} (2m+1)^2 \left[ q^{-\frac{1}{2}} + \ldots + (-1)^{m-1} (2m-1) q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Égalons maintenant les coefficients de $q^{2N}$ ($N > 0$) dans les expressions (37) et (38).

Dans (37), c'est $(-1)^N \varphi(N)$; dans la première ligne de (38), c'est

$$-64(-1)^N \sum_0 m^2 J(N - m^2);$$

enfin, dans les deux dernières lignes de (38), on voit aisément que

c'est

$$16 \sum (-1)^{d_1}(d_1 - d)(d_1 + d)^2,$$

somme étendue aux décompositions en facteurs $N = dd_1$, $d \leqq d_1$.

**35.** *Formules finales.* — Distinguons maintenant deux cas :

1° N *impair*. — On aura, en tenant compte de $dd_1 = N$,

$$(39)\quad 4\sum_0 m^2 J(N - m^2) = N\sum(d_1 - d) - 2\sum d^3, \quad (N = d_1 d;\ d \leqq d_1).$$

Toutefois, si N est un carré, $\delta_0^2$, il faut diviser par 2 le terme $-2\delta_0^3$ du second membre.

On peut obtenir, par voie élémentaire, une formule analogue à (39). Partons de la relation de Kronecker, (n° **9**),

$$\theta_1^3 = 12\sum_0 q^\nu[F(\nu) - F_1(\nu)];$$

multiplions les deux membres par $\sum_{-\infty}^{+\infty} m^2 q^{m^2}$ et égalons les coefficients de $q^N$ dans les deux membres nouveaux.

Au premier membre, ce coefficient est $\sum m^2$ étendu à toutes les décompositions $N = x^2 + y^2 + z^2 + m^2$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{4}\sum(x^2 + y^2 + z^2 + m^2) \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{4} N \varphi_1(N),$$

$\varphi_1(N)$ étant le nombre des décompositions de N en quatre carrés, ici $8\sum\delta$, puisque N est impair. On a dès lors

$$6\sum_{m \gtreqless 0} m^2[F(N - m^2) - F_1(N - m^2)]$$
$$= 12\sum_{m \geqq 0} m^2[F(N - m^2) - F_1(N - m^2)] = N\sum\delta,$$

$\delta$ désignant tout diviseur de N.

En combinant cette relation avec (39) de manière à faire disparaître successivement les termes en $F_1$ et en F, *on trouve les deux formules simples*

$$(40)\quad 8\sum_{m>0} m^2 F(N-m^2) = N\sum d_1 - \sum d^3$$

$$(41)\quad 8\sum_{m>0} m^2 F_1(N-m^2) = \frac{1}{3} N\sum (d_1 - 2d) - \sum d^3 \qquad \text{(N impair).}$$

Aux seconds membres, les sommes s'étendent aux décompositions $N = dd_1$, avec $d \leqq d_1$; on a de plus, comme d'ordinaire, $F(0) = 0$, $12F_1(0) = -1$. Si N est un carré, $\delta_0^2$, les termes qui proviennent de la décomposition $N = \delta_0 . \delta_0$ doivent *tous* être divisés par 2 dans les seconds membres ([1]).

2° N *pair*. — La même série de calculs conduit aux résultats suivants.

Désignons par $d_p$ tout diviseur pair, par $d_i$ tout diviseur impair de N; soit $N = dd_1$ une décomposition quelconque de N en deux facteurs avec $d \leqq d_1$, posons

$$U(N) = \sum (-1)^{d_1}(d_1 - d),$$

$$U_3(N) = \sum (-1)^{d_1}(d_1^3 - d^3);$$

on a, N *étant pair quelconque*,

$$(42)\quad \begin{cases} 16\sum_{m>0} m^2 F(N-m^2) \\ \quad = 3N\sum d_i - \sum d_p^3 + \sum d_i^3 + N\,U(N) + U_3(N), \end{cases}$$

---

([1]) On peut dire aussi que, dans (40), et *quel que soit* N impair, la somme au second membre porte sur les décompositions $N = dd_1$, avec $d < d_1$. L'observation ne s'applique pas à (41).

La formule (40) s'écrit aussi, quel que soit N impair,

$$8\sum_{m>0} m^2 F(N-m^2) = \sum d(d_1^2 - d^2).$$

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} & 16\sum_{m>0} m^2 F_1(N-m^2) \\ & = -N\sum d_i - \sum d_p^3 + \sum d_i^3 + NU(N) + U_3(N). \end{aligned}\right.$$

Pour N carré parfait, il n'y a pas de modification; on suppose toujours $F(0)=0$, $12F_1(0)=-1$.

**56.** *Formule de Liouville* (¹). — Nous la trouverons en égalant les coefficients de $x^2$ dans les deux membres de (10), puis ceux de $q^N$ dans les deux membres de la relation obtenue. Il vient ainsi

$$\sum_{m\geqq 0}(2m+1)^2 F[8N-(2m+1)^2] = -8\sum d'^3 + \sum(\delta_p-\delta_i)(\delta_p+\delta_i)^2,$$

$d'$ désignant tout diviseur de N à conjugué impair, et la dernière somme s'étendant aux décompositions $2N=\delta_p\delta_i$, avec $\delta_i<\delta_p$, $\delta_i$ impair, $\delta_p$ pair. On peut écrire aussi

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} & \sum_{m\geqq 0}(2m+1)^2 F[8N-(2m+1)^2] \\ & = -8\sum d'^3 + 2N\sum(\delta_p-\delta_i) + \sum(\delta_p^3-\delta_i^3), \end{aligned}\right.$$

les $d'$ et $\delta$ ayant la signification qui vient d'être indiquée.

**57.** *Remarques.* — 1° Si l'on multiplie par $\sum_{-\infty}^{+\infty}(2m+1)^2 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}$ les deux membres de la relation d'Hermite (n° 8, p. 350), et si l'on égale les coefficients de $q^{2N+1}$ dans les deux nouveaux membres, on arrive à la formule

$$(45)\quad \sum_{m\geqq 0}(2m+1)^2 F[8N+4-(2m+1)^2] = (2N+1)\sum d,$$

$d$ étant un diviseur quelconque de $2N+1$.

---

(¹) *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. XII, p. 99.

2° Les formules (44) et (45) sont implicitement contenues dans (42).

3° La formule donnée par Liouville, sans aucune indication de démonstration, comprend en réalité les deux relations (44) et (45).

58. *Dernière formule du second type.* — Reprenons la relation du n° 52 :

$$\theta_1 \Theta' \frac{\mathrm{H}\Theta_1}{\Theta^2} = 4(\vartheta - \varepsilon)\mathrm{H}_1 + 2q^{\frac{1}{4}}\cos x + 2\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \omega_m \cos(2m+1)x,$$

et égalons les coefficients de $x^2$ dans les deux membres. Au premier membre, on a $\theta_1^2 \theta'' \eta' : \theta^2$; c'est-à-dire, en remplaçant $\eta'$ par $\eta_1 \theta_1 \theta$ et $\eta_1 \theta''$ par $\theta \eta_1'' + \theta \eta_1 \theta_1^4$ (n° 2),

$$\theta_1^3(\eta_1'' + \eta_1 \theta_1^4) \quad \text{ou} \quad 4\eta_1''(\vartheta + \varepsilon) + \eta_1 \theta_1^7.$$

Il vient ainsi

$$\eta_1 \theta_1^7 = 2\eta_1''(-\vartheta - 3\varepsilon) - q^{\frac{1}{4}} - \sum_1 (2m+1)^2 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \omega_m.$$

Or, égalons de même les coefficients de $x^2$ dans les deux membres de la première relation (5), nous trouvons

$$\eta_1^5 \theta_1^3 = 2\eta_1'' \vartheta + 4\sum_1 (2m+1)^2 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta_m;$$

d'où, par combinaison avec la relation précédente,

$$(46) \quad \eta_1 \theta_1^7 + 7\eta_1^5 \theta_1^3 = 6\eta_1''(2\vartheta - \varepsilon) - q^{\frac{1}{4}} + \sum_1 (2m+1)^2 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (28\beta_m - \omega_m).$$

Maintenant, égalons, dans les deux membres de (46), les coefficients de $q^{\mathrm{N}+\frac{1}{4}}$. Si l'on désigne par $\mathrm{C}_{1,7}$ et $\mathrm{C}_{5,3}$ les nombres des décompositions de $4\mathrm{N}+1$ en un carré impair *suivi* de sept carrés pairs, et en cinq carrés impairs *suivis* de trois pairs, le coefficient cherché, au premier membre, est

$$\mathrm{C}_{1,7} + 7\mathrm{C}_{5,3}.$$

Or, si C est le nombre total des décompositions de $4N+1$ en huit carrés, écrits dans un ordre quelconque, on a évidemment

$$C = 8C_{1,7} + \frac{8.7.6}{1.2.3}C_{5,3} = 8(C_{1,7} + 7C_{5,3}).$$

Donc, le coefficient cherché au premier membre est le huitième de C, c'est-à-dire deux fois la somme des cubes des diviseurs de $4N+1$.

Si, maintenant, on observe que

$$2\mathfrak{B} - \mathfrak{C} = \sum q^\nu[4F(\nu) - F(\nu) + 3F_1(\nu)] = 3\sum q^\nu G(\nu),$$

en désignant toujours par $G(\nu)$, avec Kronecker, le nombre total,

$$F(\nu) + F_1(\nu),$$

des classes de discriminant $\nu$ (ordre propre et ordre impropre réunis), on achève le calcul sans difficulté, *et l'on arrive à la formule :*

$$24\sum_{m\geqq 0}(2m+1)^2 G\left(\frac{4N+1-(2m+1)^2}{4}\right) = \sum d(d_1+d)(d_1-3d);$$

la somme, au second membre, s'étend aux décompositions

$$4N+1 = dd_1, \qquad d \leqq d_1.$$

Toutefois, si $4N+1$ est carré, le terme qui provient de la décomposition $4N+1 = \delta.\delta$ doit être divisé par 2.

On peut observer que $G\left(\frac{\omega}{4}\right) = F\left(\frac{\omega}{4}\right) + F_1\left(\frac{\omega}{4}\right) = F_1(\omega)$, ce qui permet de n'introduire que $F_1$ dans la dernière formule.

**59.** *Remarque.* — En opérant sur la formule du n° **51**, comme l'on vient d'opérer sur celle analogue du n° **52**, on trouverait un résultat plus compliqué qu'il est inutile d'indiquer ici.

# CHAPITRE IV.

## FORMULES OU INTERVIENT LA CLASSE $x^2 - 2y^2$

**40.** Partons de la première formule (2), (nº 4),

$$\frac{1}{2}\eta_1 \theta_1 \theta \frac{H_1 \Theta_1 H}{\Theta^2} = 2\sum_1 (-1)^{m+1} q^{m^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} - 3q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\sin 2mx$$

et de

$$H = 2\sum_0 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \sin(2m+1)x.$$

Multiplions membre à membre et égalons les coefficients des termes en $\cos x$ dans les deux nouveaux membres.

Au premier, en vertu de la formule fondamentale (10), ce coefficient est

$$(47) \qquad 2\theta q^{\frac{1}{8}} \sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{8}} F(8\nu+7);$$

au second, par la formule $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$, et par la multiplication directe, on obtient, pour le coefficient analogue,

$$(48) \qquad 2\sum_1 \left[q^{-\frac{1}{4}} - 3q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right] q^{m^2}\left(q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} - q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\right).$$

Égalons maintenant les coefficients de $q^N$ dans (47) et (48). Dans (47), on trouve de suite :

$$2\sum_{m \lesseqgtr 0} (-1)^m F(8N - 1 - 8m^2);$$

dans (48), il faut poser successivement

$$(49) \qquad \begin{cases} 4N = 4m^2 + (2m-1)^2 - (2\mu-1)^2 & (m, \mu \geq 1, \ \mu \leq m), \\ 4N = 4m'^2 + (2m'+1)^2 - (2\mu'-1)^2 & (m', \mu' \geq 1, \ \mu' \leq m') \end{cases}$$

et le coefficient cherché sera

$$(50)\qquad 2\sum(-1)^{\mu+1}(2\mu-1)+2\sum(-1)^{\mu'}(2\mu'-1).$$

Les équations (49) s'écrivent

$$(51)\qquad \begin{cases} 8N-1=(4m-1)^2-2(2\mu-1)^2,\\ 8N-1=(4m'+1)^2-2(2\mu'-1)^2,\end{cases}$$

ce qui fait apparaître la forme $x^2-2y^2$. Observons maintenant que, si l'on pose $8N-1=x^2-2y^2$, $x$ et $y$ sont nécessairement impairs; dès lors, les relations (51), jointes aux *inégalités* (49), se résument en

$$8N-1=x^2-2y^2,\qquad x,y\geqq 0,\quad x>2y$$

et l'expression (50) a pour valeur

$$2\sum(-1)^{\frac{x+y}{2}}y.$$

*On a donc la formule nouvelle*

$$(52)\qquad \sum_{m\gtreqless 0}(-1)^m F(8N-1-8m^2)=\sum y(-1)^{\frac{x+y}{2}},$$

la somme, au second membre, s'étendant aux représentations

$$8N-1=x^2-2y^2,\qquad \text{avec}\qquad x,y\geqq 0,\quad x>2y.$$

**41.** En partant du produit de $\eta_1\theta_1\theta H_1\Theta_1 H:\Theta^2$ par $\Theta_1$ et utilisant la formule fondamentale (8), on trouve, par un calcul tout semblable,

$$(53)\quad 2\sum_{m\geqq 0}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}J\left(\frac{8N+1-(2m+1)^2}{8}\right)=\sum\left(\frac{2}{x}\right)(2y-x),$$

la dernière somme s'étendant aux représentations

$$8N+1=x^2-2y^2,\qquad x,y\geqq 0,\quad x>2y.$$

Si $8N+1$ est un carré, $\delta^2$, le terme $\left(\frac{2}{\delta}\right)(-\delta)$ du second membre, qui répond à $x=\delta$, $y=0$, doit être divisé par 2; et, comme toujours, $4J(0)=-1$.

42. *Remarque.* — En chassant, dans (20), le dénominateur $\Theta$, et égalant les termes constants dans les deux membres nouveaux, on retrouverait (52). De même (53) s'obtiendrait à partir de (22).

43. Nous établirons plus loin, par une autre méthode, des relations du même genre; restant dans un ordre d'idées analogue, nous donnerons ici des formules qui se rattachent au premier type de Liouville, et qui dérivent d'un développement plus compliqué.

Ce développement est le suivant :

$$\Theta' \frac{H_1\Theta_1 H}{\Theta^2} = 12\Theta_1(2x, q^2)\sum_0 q^{\frac{4\nu+3}{2}} F_1(4\nu+3) + 12 H_1(2x, q^2)\sum_0 q^{2\nu} G(\nu)$$
$$+ 4\sum_1 q^{2m^2}\left[(2m-3)q^{-\frac{1}{2}} + \ldots + (2m-6\mu+3)q^{-\frac{(2\mu-1)^2}{2}} + \ldots + (-4m+3)q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right]\cos 4mx$$
$$+ 4\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left[\frac{2m+1}{2} + \ldots + (2m-6\mu+1)q^{-2\mu^2} + \ldots + (-4m+1)q^{-2m^2}\right]\cos(4m+2)x$$
$$+ 2q^{\frac{1}{2}}\cos 2x.$$

D'autre part, en multipliant membre à membre les développements de $\Theta'$ et de $\eta_1\theta_1\theta H_1\Theta_1 H : \Theta^2$, il résulte de la relation précédente que le terme constant et le terme en $\cos 2x$ seront respectivement

$$12\eta'\sum_0 q^{\frac{4\nu+3}{2}} F_1(4\nu+3) \qquad \text{et} \qquad \eta'\left[2q^{\frac{1}{2}} + 24q^{\frac{1}{2}}\sum_0 q^{2\nu} G(\nu)\right].$$

En calculant ces termes directement, dans la multiplication, on obtient deux identités en $q$, qui conduisent sans difficulté à deux for-

mules qu'on résume en celle-ci :

$$6\sum_{m\geq 0}(-1)^m(2m+1)F_1\left(\frac{M-(2m+1)^2}{2}\right) = -\sum (x-y)(x-2y)(-1)^{\frac{x-1}{2}},$$

M désignant un entier $\equiv \pm 1 \pmod 8$, et la dernière somme s'étendant aux représentations

$$M = x^2 - 2y^2, \qquad \text{avec} \qquad x, y \geq 0, \quad x > 2y.$$

Toutefois, si M est un carré, $\delta^2$, on divise par 2, au second membre, le terme qui provient de la représentation $M = \delta^2 - 2.0^2$.

**44.** Les autres formules de ce Chapitre dérivent des développements des quotients tels que $H : \Theta^2$, établis par Biehler dans sa Thèse (¹).

Biehler a trouvé

$$\frac{1}{4}\eta_1^2\theta_1^2\theta\frac{H}{\Theta^2} = 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu+1}(m+\mu-1)q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\sin(2m-1)x,$$

développement du même type que celui de $1 : \Theta$, donné dans les *Fundamenta*.

On a, d'ailleurs (nº 14),

$$H\Theta_1 = e^{-\frac{i\pi}{8}}\eta_1\left(iq^{\frac{1}{2}}\right)\sum_1 q^{\frac{(2m-1)^2}{8}}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+1}\sin(2m-1)x.$$

Multiplions membre à membre les deux dernières relations; au nouveau premier membre, d'après la première équation (3), le terme indépendant de $x$ est $4\theta\eta_1$; au nouveau second membre, c'est

$$e^{-\frac{i\pi}{8}}\eta_1\left(iq^{\frac{1}{2}}\right)\sum_{m,\,\mu=1}^{\infty}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+\mu}(m+\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{8}+\frac{(2\mu-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}.$$

Mais la formule (nº 14), $\eta_1^2(q) = 2\eta_1(q^2)\theta_1(q^2)$, donne

$$\eta_1^2\left(iq^{\frac{1}{2}}\right) = 2\eta_1(-q)\theta_1(-q) = 2e^{\frac{i\pi}{4}}\eta_1\theta;$$

(¹) Paris, Gauthier-Villars, 1879.

il reste dès lors

$$\frac{1}{2}\vartheta\, e^{-\frac{i\pi}{8}}\eta_1\left(iq^{\frac{1}{2}}\right)=\sum_{m,\mu=1}^{\infty}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+\mu}(m+\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{8}+\frac{(2\mu-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}.$$

Le coefficient de $\vartheta$ au premier membre est la série

$$\sum_{0}^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}};$$

égalons maintenant dans les deux membres les coefficients de $q^{N-\frac{1}{8}}$.

Au premier membre, en remplaçant $\vartheta$ par sa valeur (n° **8**), le coefficient cherché est

$$(54)\qquad \sum_{m\geqq 0} F\left[\frac{8N-1-(2m+1)^2}{2}\right](-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Au second membre, nous devons poser

$$8N-1=(2m-1)^2+2(2\mu-1)^2+4(2m-1)(2\mu-1),$$

avec $m$, $\mu\geqq 1$, c'est-à-dire

$$(55)\qquad 8N-1=(2m+4\mu-3)^2-2(2\mu-1)^2,$$

et le coefficient cherché est

$$(56)\qquad \sum(m+\mu-1)(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+\mu}.$$

L'équation (55) s'écrit

$$8N-1=x^2-2y^2,\qquad (x \text{ et } y \text{ nécessairement impairs}),$$

avec $x$, $y>0$ et $x>2y$; l'expression (56) devient

$$\sum\frac{x-y}{2}(-1)^{N+1},$$

de sorte qu'*on arrive à la formule*

$$2\sum_{m\geq 0}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} F\left[\frac{8N-1-(2m+1)^2}{2}\right] = (-1)^{N+1}\sum(x-y),$$

la dernière somme s'étendant toujours aux représentations

$$8N-1 = x^2 - 2y^2,$$

avec $x, y > 0$; $x > 2y$.

**45.** Partons encore du développement ci-dessus de $H:\Theta^2$, et de (n° **14**)

$$\frac{1}{\theta(q^2)}HH_1 = 2\sum_{0}(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\sin(4m+2)x.$$

Multiplions membre à membre et égalons, dans les deux membres, les coefficients des termes en $\cos x$; nous arrivons, par un calcul semblable à celui du numéro précédent, *à la formule*

$$(57)\qquad \sum_{m\geq 0}(-1)^m F(N-2m^2) = (-1)^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}}\sum x,$$

la dernière somme s'étendant encore aux représentations

$$N = x^2 - 2y^2, \qquad \text{avec} \qquad y \geq 0, \qquad x \geq 2y,$$

avec la restriction que le terme qui provient d'une représentation dans laquelle $y = 0$, ou $x = 2y$, doit être divisé par 2.

*Remarque.* — Stieltjes a indiqué (¹) deux formules qui rentrent, comme cas particuliers, dans la relation (57) ci-dessus : elles se rapportent aux cas de N impair ou impairement pair. Mais aucun renseignement n'est donné par lui sur l'origine de ces formules; Stieltjes dit seulement que la présence d'une forme indéfinie sera sans doute la

---

(¹) *Correspondance avec Hermite*, t. I, p. 82-83.

source de très grandes difficultés si l'on veut entreprendre de les retrouver par l'analyse des fonctions elliptiques. « Je ne crois pas, ajoute-t-il, qu'on ait jamais vu s'introduire, dans ces calculs, des formes d'un déterminant positif, telles que $x^2 - 2y^2$. » Il est clair, d'après cela, que la méthode qui l'avait guidé diffère essentiellement de celle qui précède.

**46.** Enfin, en opérant de même sur les formules qui donnent les développements de $\eta_1 \theta_1^2 \theta^2 \Theta_1 : \Theta^2$ et $H_1 \Theta_1 : \eta_1(\sqrt{q})$ [Biehler, *loc. cit.*, p. 84 [1], et n° **14** de ce Mémoire], on arrive, en s'appuyant sur la première formule (7), et en posant $I(n) = F(n) - 3F_1(n)$, à la relation

$$2 \sum_{m \geqq 0} I\left[\frac{8N + 1 - (2m+1)^2}{8}\right] = \sum (x - y);$$

la dernière somme porte sur les représentations

$$8N + 1 = x^2 - 2y^2,$$

avec $y \geqq 0$, $x > 2y$. Toutefois, le terme provenant d'une représentation où $y = 0$ devra être divisé par 2.

**47.** *Observation générale.* — Nous avons, dans ce qui précède, considéré les solutions de l'équation $N = x^2 - 2y^2$, pour lesquelles $y \geqq 0$, $x \geqq 2y$.

D'autre part, Dirichlet a montré que toutes les solutions $\xi$, $\eta$ de cette équation se déduisent simplement des solutions X, Y, pour lesquelles $Y \geqq 0$, $2X > 3Y$, et cela, par la formule

$$\xi + \eta\sqrt{2} = (X + Y\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^n \qquad (n \geqq 0).$$

---

[1] La formule de Biehler est :

$$\eta_1 \theta_1^2 \theta^2 \Theta_1 : \Theta^2$$
$$= 2 \sum_1^\infty q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} (2\mu - 1) + 4 \sum_1^\infty \sum_1^\infty (2m + 2\mu - 1) q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4} + (2\mu-1)m} \cos 2mx.$$

Les solutions $\xi$, $\eta$ déduites ainsi d'une solution X, Y forment une *même série*.

Quelle relation y a-t-il entre les $x$, $y$ et les X, Y?

Élargissant un peu la question, appelons solutions $x$, $y$ non seulement celles définies ci-dessus, mais aussi les solutions $x$, $-y$, c'est-à-dire l'ensemble des solutions telles que

$$y \gtreqless 0; \qquad x \geqq 2 \bmod y.$$

Soit maintenant une solution X, Y; adjoignons-lui la solution X', Y', de la même série, définie par

$$X' + Y'\sqrt{2} = (X + Y\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}),$$

c'est-à-dire

$$X' = 3X - 4Y; \qquad Y' = -(2X - 3Y).$$

*Une* des solutions X, Y et X', Y' est une solution $x$, $y$. En effet, si $X \geqq 2Y$, c'est X, Y; si $X < 2Y$, c'est X', Y' : car Y' étant négatif (par l'hypothèse initiale $2X > 3Y$), on a

$$X' - 2|Y'| = 3X - 4Y - 2(2X - 3Y) = -X + 2Y,$$

quantité positive.

Toutefois, si $X = 2Y$, les *deux* solutions X, Y et X', Y' sont des solutions $x$, $y$ : cela ne peut se produire que si N, égal à $X^2 - 2Y^2$, est le double d'un carré.

*Inversement,* étant donnée une solution $x$, $y$, *une* des deux solutions $x$, $y$ et $x'$, $y'$, celle-ci définie par

$$x' + y'\sqrt{2} = (x + y\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}),$$

est une solution X, Y : on le reconnaît de même, en distinguant les cas de $y > 0$ et $y < 0$.

Donc enfin :

1° Si N n'est pas le double d'un carré, les solutions $x$, $y$ correspondent chacune à chacune aux solutions X, Y, et deux solutions correspondantes font partie d'une même série. On peut donc déduire

toutes les solutions, aussi bien des $x$, $y$ que des X, Y, et par la même formule.

2° Si $N = 2h^2$, les solutions $x = 2h$, $y = h$ et $x = 2h$, $y = -h$ correspondent à la même solution X, Y, à savoir $X = 2h$, $Y = h$; les autres solutions $x$, $y$ et X, Y se correspondent chacune à chacune.

**48.** Stieltjes a également donné, sans démonstration complète (*Correspondance*, p. 58 et 82), des formules dont les premiers membres sont des sommes telles que

$$\sum F(n - 2m^2), \qquad \sum F(n - 8m^2),$$

analogues, par suite, à celle qui figure dans (57), et dont les seconds membres s'expriment à l'aide des diviseurs de $n$. Mais ces relations ne sont qu'une manière d'exprimer le nombre des représentations d'un entier par la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$; c'est pourquoi nous n'en parlerons pas ici, bien que nous ayons réussi à les établir complètement par les fonctions elliptiques, et même à les étendre [1].

## CHAPITRE V.

### DIGRESSION ARITHMÉTIQUE SUR CERTAINES RELATIONS ENTRE LES MINIMA DES FORMES DE MÊME DISCRIMINANT.

**49.** Reprenons l'équation (E) du n° **7**,

$$\text{(E)} \qquad 4N + 3 = (2m + 1)(2m + 4\rho + 3) - 4\mu^2,$$

où N est donné, et où les entiers indéterminés $m$, $\mu$, $\rho$ sont assujettis

---

[1] On obtiendrait ces résultats en faisant $x = \frac{\pi}{4}$, ou $x = \frac{\pi\tau}{4}$, dans les formules rappelées au n° 3. C'est d'ailleurs une indication de Stieltjes lui-même, du moins pour $x = \frac{\pi}{4}$ (*loc. cit.*, p. 55).

aux conditions

$$(58)\qquad m \geqq 0; \qquad \rho \geqq 0; \qquad -m \leqq \mu \leqq m.$$

Nous avons fait correspondre à (E) la forme positive

$$\varphi = (2m+1)x^2 + 4\mu xy + (2m+4\rho+3)y^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

*de l'ordre propre* et de discriminant $4N+3$, où $a$, $b$, $c$ sont dès lors assujettis aux conditions

$$c > a; \qquad \text{mod}\, b < a; \qquad b \text{ pair, } a \text{ et } c \text{ impairs,}$$

et, pour avoir le nombre des solutions de (E), nous avons cherché le nombre *des formes* $\varphi$, qui lui est égal.

Nous avons alors vu qu'à toute réduite de discriminant $4N+3$, et *de l'ordre propre*

$$\varphi_0 = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

correspondait *une et une seule forme* $\varphi$, *équivalente à* $\varphi_0$, et qu'on obtient par le Tableau suivant :

1° $\beta \geqq 0$.

| | |
|---|---|
| $\alpha$ impair, $\gamma$ impair...... | $\varphi = \varphi_0 = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ |
| $\alpha$ pair, $\gamma$ impair........ | $\varphi = (\gamma,\ \gamma-\beta,\ \gamma - 2\beta + \alpha)$ |
| $\alpha$ impair, $\gamma$ pair........ | $\varphi = (\alpha,\ \beta - \alpha,\ \gamma - 2\beta + \alpha)$ |

2° $\beta < 0$.

| | |
|---|---|
| $\alpha$ impair, $\gamma$ impair........ | $\varphi = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ |
| $\alpha$ pair, $\gamma$ impair.......... | $\varphi = (\gamma,\ -\gamma - \beta,\ \gamma + 2\beta + \alpha)$ |
| $\alpha$ impair, $\gamma$ pair.......... | $\varphi = (\alpha,\ \beta + \alpha,\ \gamma + 2\beta + \alpha)$ |

Nous en avons conclu de suite, avec Hermite, que le nombre des solutions de (E) est égal au nombre des réduites $\varphi_0$, c'est-à-dire à $F(4N+3)$.

**50.** On peut évaluer ce nombre de solutions d'une autre manière.

Écrivons (E) :

$$(\text{E}')\quad 4\text{N}+3=(2m+2\rho+2-2|\mu|)(2m+2\rho+2+2|\mu|)-(2\rho+1)^2,$$

et considérons la forme positive

$$\begin{aligned}\psi = \quad & (2m+2\rho+2-2|\mu|)x^2+2(2\rho+1)xy\\ & +(2m+2\rho+2+2|\mu|)y^2,\end{aligned}$$

ou

$$\psi = ax^2+2bxy+cy^2.$$

Elle est de l'*ordre impropre* et de discriminant $4\text{N}+3$; ses coefficients $a$, $b$, $c$ sont assujettis, par (58), aux conditions

$$a+c-2b>0; \qquad b>0; \qquad c-a<c+a-2b;$$

et

$$c+a\equiv c-a\equiv 0 \pmod 4; \qquad c\geqq a.$$

La condition $a+c-2b>0$ est vérifiée d'elle-même, puisque $\psi$ est une forme positive; $c-a\equiv 0 \pmod 4$ résulte de $c+a\equiv 0 \pmod 4$; donc enfin les coefficients d'une *forme* $\psi$ vérifient uniquement les conditions

$$b>0; \qquad |b|<a; \qquad c\geqq a; \qquad a+c\equiv 0 \qquad \pmod 4.$$

Naturellement $a$ et $c$ sont pairs, puisque $\psi$ est de l'ordre impropre; $b$ est nécessairement impair, par $ac-b^2=4\text{N}+3$.

A toute solution de (E′) correspond ainsi une forme $\psi$; inversement, à une forme $\psi$ correspondent *deux* solutions de (E′), car la connaissance de $\psi$ détermine $m$, $\rho$ et $|\mu|$, c'est-à-dire $m$, $\rho$ et $\pm\mu$. Toutefois, si $a=c$, c'est-à-dire si $\mu=0$, à $\psi$ ne répond qu'une solution de (E′).

Observons maintenant que les inégalités $b>0$, $b<a$, $c\geqq a$ expriment que le point représentatif de $\psi$ est (*fig.* 1, p. 347) *à gauche de* O$y$, dans l'une des régions 1, 2, 4, arc CAH compris; il est sur CAH si $a=c$, et inversement : $\psi$ est alors ambiguë. Il en résulte que le nombre des solutions de (E′) est égal à celui des formes $\psi$ où les coefficients sont assujettis aux mêmes conditions que ci-dessus, sauf $b>0$ : car, à *deux* formes opposées non équivalentes, c'est-à-dire non ambi-

guës, $(a, b, c)$ et $(a, -b, c)$, répondront *deux* solutions, $(m, \rho, \pm\mu)$, de $(E')$; à une forme ambiguë, c'est-à-dire équivalente à son opposée [et le cas ne se présente que pour $a = c$, à cause de $ac - b^2 \equiv 3 \pmod 4$], répondra *une* solution, $(m, \rho, 0)$, de $(E')$.

Donc, enfin, on a à chercher combien il existe de formes $(a, b, c)$ de l'ordre impropre, ayant leur point représentatif dans la région totale 1, 2, 3, 4, 5 (arc CH compris), de discriminant $4N + 3$, et telles que $a + c \equiv 0 \pmod 4$.

Soit alors $\psi_0 = (\alpha, \beta, \gamma)$ une forme réduite quelconque de l'ordre impropre; en étudiant ses équivalentes dont le point représentatif est dans 1, 2, 3, 4 ou 5, on arrive sans difficulté aux résultats suivants :

1° $\beta > 0$ ($\beta = 0$ *est impossible par* $\alpha\gamma - \beta^2 = 4N + 3$).

| | Formes cherchées. |
|---|---|
| $\alpha \equiv \gamma \equiv 2 \pmod 4$ | $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\gamma, \gamma-\beta, \gamma-2\beta+\alpha)$, $(\alpha, \beta-\alpha, \gamma-2\beta+\alpha)$ |
| $\alpha \equiv 0, \quad \gamma \equiv 2$ | $(\alpha, \beta-\alpha, \gamma-2\beta+\alpha)$ |
| $\alpha \equiv 2, \quad \gamma \equiv 0$ | $(\gamma, \gamma-\beta, \gamma-2\beta+\alpha)$ |
| $\alpha \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0$ | $(\alpha, \beta, \gamma)$ |

2° $\beta < 0$.

| | |
|---|---|
| $\alpha \equiv \gamma \equiv 2 \pmod 4$ | $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\gamma, -\gamma-\beta, \gamma+2\beta+\alpha)$, $(\alpha, \beta+\alpha, \gamma+2\beta+\alpha)$ |
| $\alpha \equiv 0, \quad \gamma \equiv 2$ | $(\alpha, \beta+\alpha, \gamma+2\beta+\alpha)$ |
| $\alpha \equiv 2, \quad \gamma \equiv 0$ | $(\gamma, -\gamma-\beta, \gamma+2\beta+\alpha)$ |
| $\alpha \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0$ | $(\alpha, \beta, \gamma)$ |

Distinguons maintenant deux cas.

1° $4N + 3 \equiv 7 \pmod 8$. — En ce cas, par $\alpha\gamma - \beta^2 = 4N + 3$, il est impossible qu'on ait $\alpha \equiv \gamma \equiv 2 \pmod 4$; il résulte alors des Tableaux précédents qu'à toute réduite $\psi_0$ correspond une et une seule des formes cherchées. Le nombre de celles-ci, c'est-à-dire le nombre des solutions de $(E')$, (ou E), est donc, avec nos notations habituelles, $F_1(4N + 3)$, ce qui donne une nouvelle démonstration de la relation classique

$$F_1(M) = F(M), \qquad [M \equiv 7 \pmod 8)].$$

2° $4N+3\equiv 3 \pmod 8$. — Alors, par $\alpha\gamma-\beta^2=4N+3$, on a *nécessairement* $\alpha\equiv\gamma\equiv 2 \pmod 4$; c'est-à-dire qu'à une réduite $\psi_0$ correspondent *trois* [1] des formes cherchées; d'où

$$F_1(M)=\tfrac{1}{3}F(M), \qquad [M\equiv 3 \pmod 8].$$

**51**. Mais les Tableaux précédents nous donneront encore d'autres conséquences.

Soient $h, k, l$ des quantités réelles quelconques, considérons la somme

$$\sum(4m+4\rho+4-4|\mu|)^h(2m+1)^k(4\rho+2)^l$$

étendue à toutes les solutions de (E) qui vérifient (58).

Les Tableaux du n° **49** établissent entre les réduites de l'ordre propre, de discriminant $4N+3$, et les solutions de (E) les relations suivantes.

A une réduite $(\alpha, \beta, \gamma)$, où $\alpha$ impair, $\gamma$ impair, répond la solution de (E) :

$$2m+1=\alpha, \qquad 2\mu=\beta, \qquad 2m+4\rho+3=\gamma.$$

Si $\alpha$ pair, $\gamma$ impair :

$$2m+1=\gamma, \qquad 2\mu=\varepsilon\gamma-\beta, \qquad 2m+4\rho+3=\gamma-2\varepsilon\beta+\alpha.$$

Si $\alpha$ impair, $\gamma$ pair :

$$2m+1=\alpha, \qquad 2\mu=\beta-\varepsilon\alpha, \qquad 2m+4\rho+3=\gamma-2\varepsilon\beta+\alpha,$$

$\varepsilon=\pm 1$ selon que $\beta \geq 0$ ou $\beta<0$.

---

(1) Ces trois formes ne coïncident que si $(\alpha, \beta, \gamma)$ a pour point représentatif le point A ou le point B de la figure 1, c'est-à-dire si $(\alpha, \beta, \gamma)$ équivaut à $a(2x^2+2xy+2y^2)$. Pour que la proposition du texte subsiste, il faut donc convenir de compter une telle réduite (ou classe) pour $\frac{1}{3}$. Cette remarque s'applique à tout ce qui suit.

Il en résulte, par un calcul immédiat, que la somme considérée s'obtient en ajoutant les trois sommes

$$\sum(\alpha+\gamma-2|\beta|)^h\alpha^k(\gamma-\alpha)^l;\quad \sum\alpha^h\gamma^k(\alpha-2|\beta|)^l;\quad \sum\gamma^h\alpha^k(\gamma-2|\beta|)^l$$

étendues respectivement aux réduites propres $(\alpha, \beta, \gamma)$ de discriminant $4N+3$, pour lesquelles

$\alpha$ impair, $\gamma$ impair; $\alpha$ pair, $\gamma$ impair; $\alpha$ impair, $\gamma$ pair.

En d'autres termes, la somme considérée n'est autre chose que

$$\sum m^h m_1^k(m_2-m_1)^l,$$

somme étendue cette fois à *toutes* les réduites *propres* de discriminant $4N+3$; $m_1$ et $m_2$ $(m_1\leq m_2)$ y désignent les deux premiers *minima impairs*, $m$ le *minimum pair* d'une quelconque de ces réduites.

En utilisant les Tableaux du n° **30**, on trouve de même, *pour deuxième expression de la somme considérée*, la valeur suivante :

1° $4N+3\equiv 7 \pmod 8$,

$$\sum(2\mu_1)^h\left(\frac{\mu}{2}\right)^k(\mu_1+\mu_2-\mu)^l,$$

où $\mu_1$, $\mu_2$ $(\mu_1\leq\mu_2)$ et $\mu$ sont respectivement les deux premiers minima $\equiv 0 \pmod 4$ et le minimum $\equiv 2 \pmod 4$ d'une réduite quelconque *impropre*, de discriminant $4N+3$.

2° $4N+3\equiv 3 \pmod 8$.

$$\sum(2\nu_1)^h\left(\frac{\nu_3}{2}\right)^k(\nu_1+\nu_2-\nu_3)^l+\sum(2\nu_1)^h\left(\frac{\nu_2}{2}\right)^k(\nu_1+\nu_3-\nu_2)^l$$
$$+\sum(2\nu_2)^h\left(\frac{\nu_1}{2}\right)^k(\nu_2+\nu_3-\nu_1)^l,$$

où $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$, $(\nu_1\leq\nu_2\leq\nu_3)$ désignent les trois premiers minima d'une

réduite *impropre* quelconque, de discriminant $4N+3$ [1].

**52**. Identifions maintenant les valeurs obtenues par les deux méthodes, et supposons d'abord $4N+3 \equiv 7 \pmod 8$; on a

$$(58) \qquad \sum m^h m_1^k (m_2 - m_1)^l = \sum (2\mu_1)^h (\tfrac{1}{2}\mu)^k (\mu_1 + \mu_2 - \mu)^l,$$

les sommes, aux deux membres, s'étendant respectivement aux classes propres et impropres de discriminant $4N+3$.

Dans les deux membres, il y a un même nombre de termes; de plus, $h$, $k$, $l$ étant quelconques, il résulte d'un principe bien connu [2] dans la théorie des nombres que les deux membres doivent être identiques, terme à terme.

Par suite :

*A toute classe propre de discriminant* $\equiv 7 \pmod 8$ *correspond une classe impropre du même discriminant; si* $m_1$, $m_2$ *sont les minima impairs et* $m$ *le minimum pair* ($m_1 \leqq m_2$) *de la propre, si* $\mu_1$, $\mu_2$ *sont les deux minima* $\equiv 0 \bmod 4$ ($\mu_1 \leqq \mu_2$) *et* $\mu$ *le minimum* $\equiv 2 \pmod 4$ *de l'impropre correspondante, on a*

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}m, \qquad \mu_2 = m_1 + m_2 - \tfrac{1}{2}m, \qquad \mu = 2m_1.$$

**53**. Soit maintenant $4N+3 \equiv 3 \pmod 8$. De la relation analogue à (58) qui résulte immédiatement du n° **51**, on déduit ce théorème:

*A toute classe impropre de discriminant* $\equiv 3 \pmod 8$ *en correspondent trois propres du même discriminant; si* $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$ *sont les trois premiers minima de l'impropre* ($\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3$), *si* $m_1$, $m_2$; $m'_1$, $m'_2$; $m''_1$, $m''_2$ *sont les minima impairs et* $m$, $m'$, $m''$ *les minima*

---

[1] En vertu de la Note de la page 388, si une des réduites est

$$a(2x^2 + 2xy + 2y^2),$$

il faut diviser par 3 la partie de l'expression précédente qui lui correspond.

[2] Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie*, 3e édition, p. 227.

*pairs des trois propres correspondantes* ($m_1 \leqq m_2, \ldots$), *on a* [1]

$$\begin{array}{lll} m = 2\nu_1, & m' = 2\nu_1, & m'' = 2\nu_2, \\ m_1 = \frac{1}{2}\nu_3, & m'_1 = \frac{1}{2}\nu_2, & m''_1 = \frac{1}{2}\nu_1, \\ m_2 = \nu_1 + \nu_2 - \frac{1}{2}\nu_3, & m'_2 = \nu_1 + \nu_3 - \frac{1}{2}\nu_2, & m''_2 = \nu_2 + \nu_3 - \frac{1}{2}\nu_1. \end{array}$$

**34.** Corollaires. — 1° Les premiers minima impairs des trois classes propres associées à une même impropre étant toujours $m_1$, $m'_1$, $m''_1$, les seconds minima impairs ($m_2$, $m'_2$, $m''_2$) ont pour expressions, par ce qui précède,

$$2m'_1 + 2m''_1 - m_1, \quad 2m_1 + 2m''_1 - m'_1, \quad 2m_1 + 2m'_1 - m''_1.$$

Leur somme est $3(m_1 + m'_1 + m''_1)$, d'où ce théorème énoncé par Liouville sans démonstration :

*La somme des seconds minima impairs des classes propres de discriminant* $8M + 3$ *est trois fois la somme de leurs premiers minima impairs.*

2° De même, on établirait que :

*La somme des carrés des seconds minima impairs est neuf fois celle des carrés des premiers minima impairs.*

3° Considérons enfin, avec Liouville, la somme $\sum a(a' - a)$, $a$ et $a'$ ($a \leqq a'$) étant les deux minima impairs d'une classe propre quelconque de discriminant $8M + 3$. Par ce qui précède

$$\sum a(a' - a) = \sum m_1(2m'_1 + 2m''_1 - 2m_1) + m'_1(2m_1 + 2m''_1 - 2m'_1) + m''_1(2m_1 + 2m'_1 - 2m''_1)$$

---

[1] Si le discriminant est du type $3a^2$, parmi les classes impropres de ce discriminant figure celle de la forme $a(2x^2 + 2xy + 2y^2)$; il ne correspond à celle-là qu'une propre $a(x^2 + 3y^2)$, et les relations ci-dessous subsistent entre les minima des deux classes.

ou

$$\sum a(a'-a) = 2\sum 2m_1m'_1 + 2m_1m''_1 + 2m'_1m''_1 - m_1^2 - m_1'^2 - m_1''^2.$$

Mais l'expression du discriminant $8M+3$ en fonction des trois minima $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$ d'une classe impropre est

$$4(8M+3) = 2\nu_1\nu_2 + 2\nu_1\nu_3 + 2\nu_2\nu_3 - \nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2,$$

c'est-à-dire, par ce qui précède,

$$8M+3 = 2m_1m'_1 + 2m_1m''_1 + 2m'_1m''_1 - m_1^2 - m_1'^2 - m_1''^2;$$

d'où, avec notations habituelles,

$$\sum a(a'-a) = \frac{2}{3}(8M+3)F(8M+3).$$

Toutes ces propositions ont été données par Liouville sans démonstration.

**35.** Les formules des n$^{os}$ **32** et **33** relatives aux minima donneraient sans difficulté les expressions des formes propres et impropres qui sont en correspondance. On reconnaîtrait ainsi aisément que :

1° $4N+3 \equiv 7 \bmod 8$. — L'impropre étant $(A, B, C)$, la correspondante propre est l'une des trois formes

$$\left(\frac{A}{2}, B, 2C\right), \quad \left(2A, B, \frac{C}{2}\right), \quad \left(2A, B-A, \frac{A-2B+C}{2}\right),$$

dont une seule est d'ailleurs propre.

2° $4N+3 \equiv 3 \pmod 8$. — Les trois formes ci-dessus sont propres et sont celles qui répondent à l'impropre.

On retombe ainsi sur un résultat bien connu, par exemple dans la théorie de la multiplication complexe (¹); mais, à ma connaissance du

(¹) WEBER, *Elliptische Functionen*, p. 339-341. — *Voir* aussi LIPSCHITZ, *Crelle*, t. 53.

moins, les relations entre les minima des classes correspondantes n'ont pas encore été remarquées explicitement.

## CHAPITRE VI.

### 1° Formules où interviennent les minima des classes de même discriminant.

**56.** Les premiers membres des formules de Kronecker sont des sommes algébriques d'expressions telles que $F(N - x^2)$, les seconds membres sont fonctions des diviseurs de N; dans les relations qui vont être établies maintenant, les premiers membres sont des sommes du type $\sum \pm F(N - x^2 - y^2)$, tandis que les seconds membres s'expriment à l'aide des *minima* des formes de discriminant N.

**57.** *Expression de* $A\theta^2$. — Partons de la relation (2), (n° 4),

$$\frac{1}{4}\eta_1\theta_1\theta\frac{H_1\Theta_1 H}{\Theta^2} = \sum_1 q^{m^2}(-1)^{m+1}a_m \sin 2mx,$$

où

$$a_m = q^{-\frac{1}{4}} - 3q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}};$$

et multiplions membre à membre avec la formule classique [1]

$$\theta_1\theta\frac{H}{H_1} = \operatorname{tang} x + 4\sum_1 (-1)^m \frac{q^{2m}}{1+q^{2m}} \sin 2mx.$$

Égalons ensuite, dans les deux membres nouveaux développés en séries de Fourier, les termes indépendants de $x$.

Au premier membre, le terme cherché est $A\theta^2$, en vertu même de la première relation (3). Au second membre, si l'on observe que, dans le développement en série de $\operatorname{tang} x \sin 2mx$, le terme indépendant

[1] HERMITE, *Comptes rendus*, t. LV, p. 11; *Œuvres*, t. II, p. 243.

est $(-1)^{m-1}$, on a, pour le terme cherché,

$$\sum_1 q^{m^2} a_m - 2\sum_1 q^{m^2} a_m \frac{q^{2m}}{1+q^{2m}},$$

d'où la relation

$$\mathcal{A}\theta^2 = \sum_1 q^{m^2} a_m \frac{1-q^{2m}}{1+q^{2m}} = \sum_1 q^{m^2} a_m [1 - 2q^{2m} + \ldots + 2(-1)^\rho q^{2\rho m} + \ldots].$$

Dans les deux membres, égalons maintenant les coefficients de $q^{N+\frac{3}{4}}$; au premier membre, on a évidemment, par l'expression de $\mathcal{A}$ (n° **8**),

$$(59) \qquad \sum_{x,\,y \gtrless 0} (-1)^{x+y} F(4N + 3 - 4x^2 - 4y^2).$$

Au second membre, il faut poser

$$(60) \quad 4N + 3 = 4m^2 - (2\mu - 1)^2 + 8m\rho \qquad (m \geqq 1,\ \rho \geqq 0,\ 1 \leqq \mu \leqq m),$$

et le coefficient considéré est

$$(61) \qquad \sum (-1)^{\mu+\rho-1} 2(2\mu - 1),$$

la somme s'étendant aux solutions de (60) en $m$, $\mu$, $\rho$, qui satisfont aux inégalités indiquées. Toutefois, une solution où $\rho = 0$ donne $(-1)^{\mu-1}(2\mu - 1)$ et non $(-1)^{\mu-1} 2(2\mu - 1)$, parce que, dans l'expression ci-dessus de $\mathcal{A}\theta^2$, le premier terme du crochet est 1 et non 2, comme l'exigerait l'analogie avec les termes suivants.

Pour évaluer la somme (61), écrivons (60) :

$$4N + 3 = (2m + 2\rho - 2\mu + 1)(2m + 2\rho + 2\mu - 1) - 4\rho^2,$$

et faisons correspondre à la solution $(m, \mu, \rho)$ la forme

$$\varphi = (2m + 2\rho - 2\mu + 1)x^2 + 4\rho xy + (2m + 2\rho + 2\mu - 1)y^2,$$

ou plus simplement $(a, b, c)$.

D'après cela, et d'après les inégalités (60), $\varphi$ est une forme positive, de l'ordre propre, de discriminant $4N+3$; ses coefficients sont assujettis à

$$a \text{ et } c \text{ impairs}, \qquad a+c \equiv 0 \pmod 4,$$
$$c-a \equiv 2 \pmod 4, \qquad b \text{ pair},$$
$$a+c-2b \geqq 2, \qquad b \geqq 0, \qquad 4 \leqq c-a+2 \leqq a+c-2b.$$

Ces conditions se réduisent évidemment aux suivantes :

$$(62) \qquad a \text{ et } c \text{ impairs}, \qquad c>a, \qquad a>b, \qquad b \geqq 0.$$

Les trois dernières expriment que le point représentatif de $\varphi$ est situé (*fig.* 1, p. 347) *à gauche de* $Oy$, dans l'une des régions 1, 2, 4; il peut être sur $Oy$, mais non sur le reste du contour total.

A chaque solution de (60) correspond ainsi une forme $\varphi$, et réciproquement; de sorte que la somme (61), à évaluer, s'écrit :

$$(63) \qquad 2\sum(-1)^{\frac{1}{2}(c-a+2b-2)}\frac{c-a}{2},$$

étendue cette fois aux formes $\varphi$; toutefois si $b=0$, le terme correspondant de la somme (63) doit être divisé par 2. Ce cas d'exception est précisément le seul cas où la forme $\varphi$, *propre*, et de discriminant $4N+3$, puisse être ambiguë.

Maintenant soit $\varphi_0=(\alpha, \beta, \gamma)$ une réduite *quelconque* de l'ordre propre, de discriminant $4N+3$; les seules formes équivalentes qui *puissent* avoir leur point représentatif dans la région indiquée ci-dessus sont :

$$\varphi_0=(\alpha, \beta, \gamma), \qquad \varphi_1=(\alpha, \beta+\alpha, \gamma+2\beta+\alpha),$$
$$\varphi_2=(\gamma, -\beta+\gamma, \gamma-2\beta+\alpha).$$

1° *$\alpha$ et $\gamma$ impairs.* — $\varphi_0$ peut seule être une forme $\varphi$, et ne l'est que si $\beta \geqq 0$. En ce cas, elle donne, dans (63), le terme

$$2(-1)^{\frac{1}{2}(\gamma-\alpha+2\beta-2)}\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

qu'on écrit aussi

$$(64)\qquad (\mu_2-\mu_1)^{\frac{1}{4}(2\mu_2-\mu-2)},$$

en désignant par $\mu_1$ et $\mu_2$ ($\mu_1 \leq \mu_2$) les deux minima impairs de $\varphi_0$; par $\mu$ son minimum pair. (Ici, en effet, $\mu_1=\alpha$, $\mu_2=\gamma$, $\mu=\alpha+\gamma-2\beta$).

Si $\beta=0$, le terme (64) doit être divisé par 2.

En d'autres termes, si l'on introduit à la fois les deux formes *opposées* $(\alpha, \beta, \gamma)$ et $(\alpha, -\beta, \gamma)$, qui, ici, ne peuvent être équivalentes que pour $\beta=0$, on peut dire qu'une réduite $(\alpha, \beta, \gamma)$ *quelconque*, pour laquelle $\alpha$ et $\gamma$ sont impairs, $\beta$ étant $\leqq 0$, donne dans la somme (63) le terme

$$\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1)(-1)^{\frac{1}{4}(2\mu_2-\mu-2)}.$$

2° $\alpha$ *impair*; $\gamma$ *pair*. — $\varphi_1$ seule peut être une forme $\varphi$, et ne l'est que si $\beta<0$. (Ici $\beta$ ne peut être nul, car $\alpha\gamma-\beta^2=4N+3$ montre que $\beta$ est impair). Il lui correspond, dans (63), le terme

$$2(-1)^{\frac{1}{4}(\gamma+4\beta+2\alpha-2)}\frac{\gamma+2\beta}{2}\qquad\text{ou}\qquad(\mu_2-\mu_1)(-1)^{\frac{1}{4}(2\mu_2-\mu-2)},$$

car $\mu_1=\alpha$, $\mu_2=\alpha+\gamma+2\beta$, $\mu=\gamma$. On peut dire aussi que, à *toute* réduite $(\alpha, \beta, \gamma)$ pour laquelle $\alpha$ est impair et $\gamma$ pair, répond encore, dans (63), le terme

$$\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1)(-1)^{\frac{1}{4}(2\mu_2-\mu-2)}.$$

3° $\alpha$ *pair*; $\gamma$ *impair*. — C'est ici $\varphi_2$ qui s'introduit, et le résultat est le même.

Donc enfin, la somme (63), que nous savons égale à l'expression (59), n'est autre chose que la somme

$$\frac{1}{2}\sum(\mu_2-\mu_1)(-1)^{\frac{1}{4}(2\mu_2-\mu-2)},$$

étendue à *toutes* les classes propres de discriminant $4N+3$; $\mu_1$ et $\mu_2$ ($\mu_1 \leq \mu_2$) désignent les deux minima impairs, $\mu$ le minimum pair d'une quelconque de ces classes.

D'ailleurs, on peut simplifier un peu l'expression de l'unité qui figure dans la somme. En effet, la valeur du discriminant en fonction des trois minima :

$$4(4N+3) = -(\mu_2 - \mu_1 + \mu)^2 + 4\mu\mu_2$$

donne

$$\mu\mu_2 = 4N+3+\left(\frac{\mu_2-\mu_1+\mu}{2}\right)^2.$$

Le premier membre étant pair (à cause de $\mu$), on en conclut que $\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1+\mu)$ est impair, et dès lors $\mu\mu_2 \equiv 0 \pmod 4$, c'est-à-dire $\mu \equiv 0 \pmod 4$; de plus

$$\mu\mu_2 \equiv 4N+4 \pmod 8 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{4}\mu\mu_2 \equiv N+1 \pmod 2.$$

Par suite

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{1}{4}(2\mu_2-\mu-2)} &= (-1)^{\frac{1}{4}\mu_2(2\mu_2-\mu-2)} \\ &= (-1)^{N+1}(-1)^{\frac{1}{2}\mu_2(\mu_2-1)} = (-1)^{N+1}(-1)^{\frac{1}{2}(\mu_2-1)},\end{aligned}$$

car $\mu_2$ est impair, par définition.

D'ailleurs, $\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1+\mu)$ étant impair et $\mu \equiv 0 \pmod 4$, on voit que $\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1)$ est impair, c'est-à-dire que

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\mu_2-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu_1+1)}.$$

**58.** *Finalement, nous obtenons la relation*

$$\begin{aligned}\sum_{x,y \gtrless 0} (-1)^{x+y} F(4N+3-4x^2-4y^2) \\ = \frac{1}{2}(-1)^N \sum (\mu_2-\mu_1)(-1)^{\frac{1}{2}(\mu_1+1)}.\end{aligned}$$

Au premier membre, la somme porte sur toutes les valeurs entières, positives, nulles ou négatives de $x$, $y$, telles que $4N+3-4x^2-4y^2$ ne soit pas négatif; *on tient compte de l'ordre* de $x^2$ et de $y^2$, c'est-

à-dire que, si $x \lessgtr y$, on a à prendre les *deux* termes

$$(-1)^{x+y}F(4N+3-4x^2-4y^2)$$

et

$$(-1)^{y+x}F(4N+3-4y^2-4x^2);$$

c'est-à-dire à doubler le premier de ces termes.

Au second membre, la somme porte sur les classes propres de discriminant $4N+3$; $\mu_1$, $\mu_2$ ($\mu_1 \leqq \mu_2$) sont les deux minima impairs, $\mu$ le minimum pair d'une quelconque de ces classes.

**59.** *Remarque.* — En faisant $x = 0$ dans la troisième des relations (3), on obtiendrait l'expression de $\mathcal{H}\theta$ [1] :

$$\mathcal{H}\theta = \sum_{0}^{\infty}(-1)^{\nu} q^{\frac{4\nu+3}{4}} \psi(4\nu+3),$$

$\psi(n)$ représentant la somme des diviseurs de $n$ inférieurs à $\sqrt{n}$ : c'est, d'une manière plus précise, la fonction $\frac{1}{2}[\Phi(n) - \Psi(n)]$ de Kronecker [2].

Par suite

$$\mathcal{H}\theta^2 = \sum_{0}^{\infty}(-1)^{\nu} q^{\frac{4\nu+3}{4}} \psi(4\nu+3) \times \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{m} q^{m^2};$$

ce qui donne une expression du coefficient de $q^{N+\frac{3}{4}}$ dans $\mathcal{H}\theta^2$, où ne figure que la fonction $\psi$. On aura dès lors, en vertu de ce qui précède,

$$\frac{1}{2}\sum(\mu_2 - \mu_1)(-1)^{\frac{\mu_1 - 1}{2}} = \sum_{m \gtreqless 0} \psi(4N+3-4m^2),$$

et, par suite, la somme qui figure au premier membre s'exprime à l'aide de la seule fonction $\psi$.

Des remarques analogues s'appliqueront aux formules qui suivent.

---

(1) *Voir* aussi HERMITE, *Lettre à Liouville* (*Œuvres*, t. II, p. 119-120).

(2) $\Phi(n)$ est la somme des diviseurs de $n$; $\Psi(n)$ est $\sum(d_1 - d)$ étendue aux décompositions $n = dd_1$, $d \leqq d_1$.

**60.** *Expression de* $4\eta_1\theta$. — On opère, comme au n° **57**, sur les formules (n° **5**) :

$$\eta_1^2\theta_1\theta\frac{\mathrm{H}\mathrm{H}_1}{\Theta^2} = 8\sum_1 \frac{mq^m}{1+q^{2m}}\sin 2mx,$$

$$\theta_1\frac{\Theta_1\mathrm{H}}{\mathrm{H}_1} = \frac{1}{\cot x} + 2\sum_1 q^{m^2}(-1)^{m+1}[1+2q^{-1}+\ldots+2q^{-(m-1)^2}]\sin 2mx;$$

et l'on trouve

$$4\eta_1\theta = 8\sum_1(-1)^{m-1}\left[\frac{mq^m}{1+q^{2m}} + m\frac{q^{m^2+m}}{1+q^{2m}}(1+2q^{-1}+\ldots+2q^{-(m-1)^2})\right].$$

Égalant les coefficients de $q^{\mathrm{N}}$ dans les deux membres, on parvient, par des raisonnements analogues aux précédents, à la *formule*

$$4\sum_{x,\,y\gtreqless 0}(-1)^x\mathrm{F}[4\mathrm{N}-4x^2-(2y+1)^2] = 2\sum\mu(-1)^{\frac{1}{4}(\mu_1+\mu_2+2)}.$$

Dans le premier membre, $4x^2$ est écrit avant $(2y+1)^2$, c'est-à-dire que l'ordre des deux carrés est fixé; au second membre, la somme porte sur les classes propres de discriminant $4\mathrm{N}$; $\mu_1$ et $\mu_2$ ($\mu_1 \leqq \mu_2$) sont les deux minima impairs, $\mu$ le minimum pair d'une quelconque de ces classes.

On peut écrire aussi

$$\sum\mu(-1)^{\frac{1}{4}(\mu_1+\mu_2+2)} = 4(-1)^{\mathrm{N}+1}\sum_{m\geqq 0}\psi[4\mathrm{N}-(2m+1)^2].$$

**61.** Des calculs semblables ([1]), à partir des développements de $\eta_1\theta_1\theta\mathrm{H}_1\Theta_1\mathrm{H}:\Theta^2$ et $\eta_1\theta\mathrm{H}:\Theta_1$; puis de $\theta_1^2\eta_1\theta\mathrm{H}\Theta_1:\Theta^2$ et $\eta_1\mathrm{H}_1\mathrm{H}:\Theta$,

---

([1]) Il faudrait seulement, au lieu des termes indépendants, égaler les termes en $\cos x$.

donneraient les expressions de

$$\mathcal{M}\theta^2 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}\theta\theta_1 ;$$

ce qui conduirait *aux deux formules* ci-dessous :

$$2\sum_{x,\, y \gtreqless 0} (-1)^{x+y}\, \mathrm{F}(\mathrm{N} - x^2 - y^2) = \frac{(-1)^{\mathrm{N}}}{2} \sum (\mu_1 + \mu_2 - \mu)(-1)^{\frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_2 - \mu + 2)},$$

$$2\sum_{x,\, y \gtreqless 0} (-1)^{x}\, \mathrm{F}(\mathrm{N} - x^2 - y^2) = \sum \mu_1 (-1)^{\frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_2 + 2)}.$$

Les seconds membres s'étendent aux classes propres de discriminant $4\mathrm{N}$ ; les $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu$ ont les mêmes significations qu'au n° **60**. Dans les premiers membres, l'ordre des carrés entre en ligne de compte.

**62.** En opérant enfin d'une manière semblable, et utilisant les formules du troisième groupe (n° **8**), on formerait $\mathcal{E}\eta_1^2$ et $\mathcal{E}\eta_1\theta_1$, d'où *deux formules*. D'abord :

$$2\sum_{x,\, y \gtreqless 0} \mathrm{I}\left[\frac{4\mathrm{N} - 2 - (2x+1)^2 - (2y+1)^2}{4}\right] = \sum (\mu_1 + \mu_2 - \mu)(-1)^{\frac{\mu - 2}{4}},$$

la somme, au second membre, s'étend aux classes propres de discriminant $4\mathrm{N} - 2$ ; $\mu_1$ et $\mu_2$ ($\mu_1 \leqq \mu_2$) sont les minima impairs, $\mu$ le minimum pair d'une de ces classes.

Enfin :

$$2\sum_{x,\, y \gtreqless 0} \mathrm{I}\left[\frac{4\mathrm{N} + 1 - 4x^2 - (2y+1)^2}{4}\right] = 2\sum \mu_1 (-1)^{\frac{\mu - 2}{4}},$$

la somme, au second membre, s'étendant aux classes propres de discriminant $4\mathrm{N} + 1$ ; $\mu_1$ et $\mu_2$ ($\mu_1 \leqq \mu_2$) sont les minima impairs, $\mu$ le minimum pair d'une de ces classes.

Toutefois, si $4\mathrm{N} + 1$ est un carré, $\delta^2$, parmi les classes propres de discriminant $4\mathrm{N} + 1$ figure $\delta x^2 + \delta y^2$ ; le terme correspondant, au

second membre de la dernière formule, doit être divisé par 2, c'est-à-dire que, là encore, la classe compte pour $\frac{1}{2}$. Enfin $I(0) = \frac{1}{4}$.

### 2° Propriétés de certaines fonctions numériques liées aux minima des classes de même discriminant.

**63.** On peut introduire certaines fonctions, liées aux minima des classes de même déterminant, et qui satisfont à des relations analogues à celles de Kronecker, vérifiées par les nombres de classes eux-mêmes.

**64.** *Fonction $\mathfrak{F}$.* — Soit $\mathcal{K}$ le terme indépendant de $x$ dans le développement, en série de Fourier, de la fonction

$$\eta_1 \theta_1 \theta H' \frac{H_1 \Theta_1}{\Theta^2}.$$

Pour l'obtenir, on multiplie membre à membre les deux relations

$$\eta_1 \theta_1 \theta \frac{H_1 \Theta_1 H}{\Theta^2} = 4 \sum_1 q^{m^2} (-1)^{m+1} a_m \sin 2mx, \qquad (\textit{voir } \text{n}^\circ\ 57),$$

$$\frac{H'}{H} = \operatorname{cotang} x + 4 \sum_1 \frac{q^{2m}}{1 - q^{2m}} \sin 2mx;$$

et l'on calcule directement le terme indépendant dans le produit des deux seconds membres. C'est un calcul analogue à celui du n° **57**, et qui conduit à la formule

$$\mathcal{K} = 2 \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N q^{N + \frac{3}{4}} \mathfrak{F}(4N+3),$$

étant posé

$$(64') \qquad \mathfrak{F}(4N+3) = \sum (\mu_2 - \mu_1)(-1)^{\frac{\mu_2 - \mu_1 - 2}{4}};$$

la dernière somme s'étend aux classes propres de discriminant $4N+3$, $\mu_1$ et $\mu_2$ ($\mu_1 < \mu_2$) sont les deux minima impairs d'une telle classe.

D'autre part, si l'on multiplie membre à membre les développe-

ments

$$H' = 2\sum_0 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(2m+1)\cos(2m+1)x,$$

$$\eta_1\theta_1\theta^2\frac{H_1\Theta_1}{\Theta^2} = 4\sum_0 (2m+1)\frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}\cos(2m+1)x, \qquad (\text{n}^\circ\ 5)$$

au premier membre nouveau, le terme indépendant de $x$ est $\mathcal{K}\theta$; au second membre (développé en série de Fourier), c'est évidemment

$$4\sum_0 (-1)^m(2m+1)^2\frac{q^{\frac{(2m+1)^2}{4}+\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}.$$

Il ne reste plus qu'à égaler, dans cette expression et dans $\mathcal{K}\theta$, les coefficients de $q^{N+\frac{3}{4}}$ pour obtenir la *formule*

$$(-1)^N\sum_{x \gtreqless 0}\mathcal{F}(4N+3-4x^2) = 2\sum d^2(-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

la somme, au second membre, s'étendant aux décompositions en facteurs

$$4N+3 = dd_1, \qquad d < d_1.$$

Ainsi, la fonction numérique $\mathcal{F}(4n+3)$, définie par (64'), en fonction des minima impairs des classes propres de discriminant $4n+3$, vérifie une relation du même genre que la fonction $F(4n+3)$, qui exprime le nombre de ces classes; seulement, au second membre apparaissent des *carrés* de diviseurs (réels et positifs), tandis que, dans les formules de Kronecker, ces diviseurs ne figurent qu'à la première puissance.

65. *Fonction* $\mathcal{G}$. — Si l'on calcule de même le terme indépendant, $\mathfrak{z}$, dans le développement de Fourier de

$$\eta_1\theta_1\theta\,\Theta_1'\frac{HH_1}{\Theta^2},$$

en utilisant ceux de $\eta_1\theta_1\theta H_1\Theta_1 H : \Theta^2$ et $\Theta'_1 : \Theta_1$, on trouve aisément

$$\mathfrak{z} = 4\sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{4}} \mathcal{G}(8\nu+7),$$

étant posé

$$\mathcal{G}(8\nu+7) = \sum \mu(-1)^{\frac{1}{4}(\mu_1+\mu_2+\mu+2)},$$

somme étendue aux classes *de l'ordre impropre* de discriminant $8\nu+7$, $\mu_1$ et $\mu_2(\mu_1 \leqq \mu_2)$ étant les deux minima $\equiv 0 \pmod 4$, et $\mu$ le minimum $\equiv 2 \pmod 4$ d'une telle classe.

D'autre part, la multiplication des développements de

$$\eta_1^2\theta_1\theta H H_1 : \Theta^2, \qquad (\text{n}^\text{o}\ \mathbf{5}),$$

et de $\Theta'_1$ permet de calculer $\mathfrak{z}\eta_1$, *d'où la formule*

$$\sum_{x \geqq 0} \mathcal{G}[8N - (2x+1)^2] = -2\sum \delta^2(-1)^{\frac{\delta_1-\delta-1}{2}},$$

la seconde somme s'étendant aux décompositions

$$2N = \delta\delta_1,$$

$0 < \delta_1$ et $\delta$, $\delta_1$ étant de parités différentes.

On pourrait multiplier aisément les exemples de cette nature.

### 3° Formules où interviennent les carrés des minima des classes de même discriminant.

**66.** *Expression de* $\mathfrak{A}'\eta_1\theta_1^3$. — En dérivant le développement classique de $H^2 : \Theta^2$, à savoir

$$\eta_1^2\theta_1^2\frac{H^2}{\Theta^2} = 8\sum_0^\infty \frac{mq^m}{1-q^{2m}} - 8\sum_0^\infty \frac{mq^m}{1-q^{2m}}\cos 2mx,$$

et utilisant les relations différentielles (n° 2), on a

$$(65)\qquad \eta_1^2\theta_1^2\theta^2\frac{H_1\Theta_1 H}{\Theta^3} = 8\sum_1^\infty \frac{m^2q^m}{1-q^{2m}}\sin 2mx.$$

D'autre part [1],

$$(66)\quad \theta_1\frac{\Theta H_1}{H} = \operatorname{cotang} x + 2\sum_1 q^{m^2}[1+2q^{-1}+\ldots+2q^{-(m-1)^2}]\sin 2mx.$$

Multiplions (65) et (66) membre à membre, et égalons ensuite les termes constants dans les deux membres nouveaux, développés en séries de Fourier.

Le premier membre, $\eta_1^2\theta_1^3\theta^2 H_1^2\Theta_1 : \Theta^2$, a pour terme constant, d'après (4),

$$(67)\quad -4\mathcal{A}'e^{\frac{i\pi}{4}}\eta_1\theta_1^3, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 4\eta_1\theta_1^3\sum_0^\infty(-1)^\nu q^{\nu+\frac{3}{4}}F(4\nu+3).$$

Au second membre nouveau, le terme constant est [2]

$$(68)\quad 8\sum\frac{m^2q^m}{1-q^{2m}} + 8\sum_1 m^2\frac{q^{m^2+m}}{1-q^{2m}}[1+2q^{-1}+\ldots+2q^{-(m-1)^2}].$$

Égalons maintenant les coefficients de $q^N$ dans les expressions (67) et (68).

Dans (67), en vertu de la relation classique [3]

$$\eta_1\theta_1^3 = 2\sum_{h=0}^\infty q^{h+\frac{1}{4}}\Phi(4h+1),$$

---

[1] HERMITE, *Comptes rendus*, t. LV; *Journal de Liouville*, 2e série, t. IX, p. 145; *Œuvres*, t. II, p. 244.

[2] Car dans le développement $\operatorname{cotang} x \sin 2mx$, le terme constant est 1.

[3] Cette relation exprime que le nombre de décompositions de $4h+1$ en quatre carrés, le carré impair écrit d'abord, est égal à deux fois la somme des diviseurs de $4h+1$.

où $\Phi(n)$ désigne la somme des diviseurs de $n$, le coefficient de $q^{\mathrm{N}}$ est

$$8\sum_{h\geqq 0}(-1)^{\mathrm{N}+h+1}\mathrm{F}(4\mathrm{N}-4h-1)\Phi(4h+1).$$

Dans (68), le coefficient de $q^{\mathrm{N}}$ se compose de deux parties.

On doit d'abord poser

$$(69)\qquad \mathrm{N}=m'+2m'\rho'=m'(2\rho'+1),$$

et prendre $8\sum m'^2$.

Il faut poser ensuite

$$(70)\quad \mathrm{N}=m^2+m+2m\rho-\mu^2\qquad (m\geqq 1,\ \rho\geqq 0,\ |\mu|\leqq m-1),$$

et prendre $8\sum m^2$, étendue à toutes les solutions $m$, $\rho$, $\mu$ de cette équation, qui vérifient les inégalités indiquées.

Écrivons (70)

$$4\mathrm{N}=(2m+2\rho-2|\mu|+1)(2m+2\rho+2|\mu|+1)-(2\rho+1)^2$$

et faisons correspondre à toute solution $m$, $\mu$, $\rho$ la forme positive, de l'ordre propre et de discriminant $4\mathrm{N}$,

$$\varphi=(2m+2\rho-2|\mu|+1,\ 2\rho+1,\ 2m+2\rho+2|\mu|+1)=(a,b,c).$$

Les coefficients de $\varphi$ vérifient les conditions

$$a \text{ et } c \text{ impairs},\qquad a+c\equiv 2,\qquad c-a\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,4),\qquad b \text{ impair},$$

$$b>0,\qquad \frac{c+a-2b}{4}\geqq 1,\qquad a>b,\qquad c\geqq a,$$

qui, le discriminant étant $4\mathrm{N}$, se réduisent évidemment aux suivantes :

$$(71)\qquad b \textit{ impair},\qquad b>0,\qquad a>b,\qquad c\geqq a.$$

A une solution $(m, \mu, \rho)$ de (70) correspond ainsi une forme $\varphi$; à une

forme $\varphi$ répondent (à cause de $\pm\mu$) *deux* solutions de (70), sauf si $\mu = 0$.

On a donc finalement à considérer les formes $\varphi$ et à prendre la somme

$$2 \times 8 \sum \frac{(a+c-2b)^2}{16} \quad \text{ou} \quad \sum (a+c-2b)^2,$$

étendue à toutes ces formes. Toutefois, si $\mu = 0$, c'est-à-dire si $c = a$, le terme $(a+c-2b)^2$ doit être divisé par 2.

Les inégalités (71) montrent que le point représentatif de $\varphi$ est (*fig.* 1, p. 347) *à gauche de* $Oy$, dans l'une des régions 1, 2, 4, y compris le contour M'CAH, et non compris la ligne $Hy$.

Soit alors $\varphi_0 = (\alpha, \beta, \gamma)$ une réduite *quelconque* propre, de discriminant $4N$.

1° Si $\beta$ est impair et $\beta > 0$, $\varphi_0$ est une forme $\varphi$. Si $\beta < 0$, aucune équivalente de $\varphi_0$ n'est une forme $\varphi$.

Pour $\beta > 0$, $\varphi_0$ donne le terme $(\alpha+\gamma-2\beta)^2$, ou $\mu^2$, en désignant par $\mu$ le minimum pair de $\varphi$.

Toutefois, si $\alpha = \gamma$ (ce qui est le seul cas où $\varphi_0$ puisse être ambiguë lorsque $\beta$ est impair), il faut prendre seulement $\frac{1}{2}\mu^2$.

On peut donc dire, en introduisant les réduites opposées $(\alpha, \beta, \gamma)$ et $(\alpha, -\beta, \gamma)$, qu'une réduite *quelconque*, propre $(\alpha, \beta, \gamma)$, de discriminant $4N$, où $\beta$ est impair, donne le terme $\frac{1}{2}\mu^2$, $\mu$ désignant son minimum pair.

2° Si $\beta$ est pair, l'un des deux coefficients $\alpha$, $\gamma$ est $\equiv 0 \pmod 4$, l'autre est impair. On trouve encore, par un raisonnement semblable à celui du n° 57, qu'une réduite *quelconque*, où $\beta$ est pair, donne le terme $\frac{1}{2}\mu^2$. Il n'y a qu'un cas d'exception, c'est celui d'une réduite ambiguë, $\varphi_0'$, pour laquelle $\beta = 0$.

En ce cas, aucune des formes

$$(\alpha, \beta, \gamma), \quad (\alpha, \beta \pm \alpha, \gamma \pm 2\beta + \alpha), \quad (\gamma, -\beta \pm \gamma, \gamma \mp 2\beta + \alpha)$$

n'est une forme $\varphi$ : car si, par exemple, c'est $\alpha$ qui est impair, la seule équivalente à $\varphi_0$ qui *puisse* être une forme $\varphi$ est $(\alpha, \alpha, \gamma+\alpha)$, et, comme en ce cas $a = b$, elle n'est effectivement pas forme $\varphi$.

Donc enfin, dans le coefficient cherché de $q^{\mathrm{N}}$, chaque réduite propre, de discriminant $4\mathrm{N}$, donne le terme $\frac{1}{2}\mu^2$, sauf les réduites pour lesquelles $\beta = 0$ : mais les termes qui proviennent de (69), à savoir

$$8\sum m'^2, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\sum(4m')^2,$$

font évidemment disparaître l'exception, car ils s'écrivent $\frac{1}{2}\sum\mu^2$, somme étendue aux réduites *propres* de discriminant $4\mathrm{N}$, pour lesquelles le coefficient moyen est nul.

**67**. Par suite, *la conclusion de cette discussion est la formule :*

$$(-1)^{\mathrm{N}+1}\sum_{h \geqq 0}(-1)^h \mathrm{F}(4\mathrm{N}-4h-1)\Phi(4h+1) = \frac{1}{16}\sum\mu^2;$$

$\Phi(n)$ est la somme des diviseurs de $n$, et la somme au second membre s'étend aux classes propres de discriminant $4\mathrm{N}$, $\mu$ désignant le minimum pair d'une quelconque de ces classes. Bien entendu, au premier membre, $h$, qui part de $0$, prend toutes les valeurs (positives et entières) qui ne rendent pas $4\mathrm{N}-4h-1$ négatif, c'est-à-dire que $h = 0, 1, 2, \ldots, (\mathrm{N}-1)$.

Cette formule est intéressante en ce qu'elle exprime $\sum\mu^2$ à l'aide seulement des deux fonctions F et $\Phi$.

**68**. De même, en partant de (65) et du développement de $\eta_1\Theta\Theta_1$ : II, on formerait $2\eta_1^3\theta_1$, d'où la formule

$$\sum_{h \geqq 0} \mathrm{I}\left[\frac{4\mathrm{N}-1-(4h+3)}{4}\right]\Phi(4h+3) = \frac{1}{16}\sum\mu^2,$$

la somme s'étendant, au second membre, aux classes propres de discriminant $4\mathrm{N}-1$, et $\mu$ désignant le minimum pair d'une telle classe.

On n'oubliera pas que $\mathrm{I}(0) = \frac{1}{4}$.

Indiquons maintenant une voie différente pour obtenir des relations analogues.

**69.** *Définition de la fonction* $\mathcal{E}(q)$. — Nous désignerons par $\mathcal{E}(q)$, ou plus simplement $\mathcal{E}$, le terme constant dans le développement trigonométrique de

$$\eta_1^3 \theta_1^2 \theta^2 \frac{\Theta_1 H_1^2 H^2}{\Theta^4}.$$

On peut évaluer $\mathcal{E}$ de diverses manières.

En premier lieu, partons des développements

$$\eta_1^2 \theta_1^2 \theta^2 \frac{H_1 \Theta_1 H}{\Theta^3} = 8 \sum_1 \frac{m^2 q^m}{1 - q^{2m}} \sin 2mx,$$

$$\eta_1 \frac{H H_1}{\Theta} = 4 \sum_1 q^{m^2} \left[ q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right] \sin 2mx;$$

en multipliant membre à membre et égalant les termes constants, on trouve

$$\mathcal{E} = 16 \sum_1^\infty m^2 \frac{q^{m^2+m}}{1 - q^{2m}} \left[ q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right],$$

$\mathcal{E}$ est donc de la forme

$$(72) \qquad \mathcal{E} = \sum_0^\infty q^{2N - \frac{1}{4}} \alpha_N,$$

et, si l'on pose

$$(73) \qquad 8N - 1 = 4m^2 + 4m + 8m\rho - (2\mu - 1)^2$$
$$(m \geq 1, \quad \rho \geq 0, \quad 0 < \mu \leq m),$$

$$\alpha_N = 16 \sum m^2,$$

la somme s'étendant aux solutions indiquées, $m$, $\rho$, $\mu$, de (73). En écrivant (73)

$$8N - 1 = (2m + 2\rho - 2\mu + 2)(2m + 2\rho + 2\mu) - (2\rho + 1)^2 = ac - b^2,$$

et faisant correspondre à la solution $m$, $\rho$, $\mu$ la forme $(a, b, c)$ posi-

tive, impropre, et de discriminant $8N-1$, on reconnaît, par la marche déjà si souvent suivie, qu'on a

$$\alpha_N = \frac{1}{2}\sum(\mu_1^2+\mu_2^2), \tag{74}$$

$\mu_1$ et $\mu_2$ ($\mu_1 \leqq \mu_2$) étant les deux minima $\equiv 0 \pmod 4$ d'une classe impropre quelconque, de discriminant $8N-1$.

**70.** *Seconde évaluation de* $\alpha_N$. — En opérant de même sur les deux développements (nos **3** et **4**) :

$$\eta_1^2\theta_1\theta\frac{HH_1}{\Theta^2} = 8\sum_1 \frac{mq^m}{1+q^{2m}}\sin 2mx,$$

$$\eta_1\theta_1\theta\frac{H_1\Theta_1 H}{\Theta^2} = 4\sum_1 (-1)^{m+1}q^{m^2}a_m \sin 2mx,$$

(*voir* n° **57**), on trouve :

$$\varepsilon = 16\sum_1(-1)^{m+1}m\frac{q^{m^2+m}}{1+q^{2m}}\left[q^{-\frac{1}{4}}-\ldots+(-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right].$$

On est ainsi conduit, pour calculer $\alpha_N$, à poser

$$8N-1 = 4m^2+4m+8m\rho-(2\mu-1)^2, \quad (m \geqq 1,\ \rho \geqq 0,\ 0<\mu \leqq m),$$

d'où

$$\alpha_N = 16\sum m(2\mu-1)(-1)^{m+\rho+\mu}.$$

En introduisant la même forme $(a, b, c)$ que ci-dessus, on trouve

$$\alpha_N = \sum(2\mu_1\mu_2-\mu\mu_1-\mu\mu_2), \tag{75}$$

$\mu_1$, $\mu_2$ étant les minima $\equiv 0 \pmod 4$, ($\mu_1 \leqq \mu_2$) et $\mu$ le minimum $\equiv 2 \pmod 4$ d'une classe impropre quelconque, de discriminant $8N-1$.

**71.** La comparaison des deux valeurs de $\alpha_N$ conduit à la relation

suivante :

$$(76)\qquad \sum(\mu_1^2+\mu_2^2+2\mu\mu_1+2\mu\mu_2-4\mu_1\mu_2)=0;$$

la somme s'étendant à toutes les classes impropres d'un discriminant donné, $8N-1$; $\mu_1$, $\mu_2$ et $\mu$ ont les significations qui viennent d'être indiquées.

La relation (76), qui semble nouvelle, ne paraît pas facilement démontrable par voie élémentaire.

*Exemple.* — Soit $8N-1=15$; il y a deux classes impropres $(2, 1, 8)$ et $(4, 1, 4)$, pour lesquelles $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu$ ont les valeurs respectives

$$8,\ 8,\ 2 \quad \text{et} \quad 4,\ 4,\ 6;$$

et l'on a bien

$$(8^2+8^2+4.8+4.8-4.64)+(4^2+4^2+12.4+12.4-4.16)=0.$$

**72.** *Troisième évaluation de* $\alpha_N$. — Il faut partir des relations [nos **3** et **8**, (5)]

$$\eta_1^2\theta_1\frac{H^2H_1}{\Theta^2}=4\vartheta H_1-8\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(q^{-1}+\ldots+mq^{-m^2})\cos(2m+1)x,$$

$$\eta_1\theta_1\theta^2\frac{H_1\Theta_1}{\Theta^2}=4\sum_0(2m+1)\frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}\cos(2m+1)x;$$

et faire encore le produit membre à membre. On obtient ainsi, pour $\mathcal{E}$, la somme des deux expressions

$$16\vartheta\sum_0(2m+1)\frac{q^{\frac{(2m+1)^2}{4}+\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}$$

et

$$(77)\qquad -16\sum_0(2m+1)\frac{q^{\frac{(2m+1)^2}{4}+\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}(q^{-1}+\ldots+mq^{-m^2}).$$

Cherchons le coefficient de $q^{k+\frac{3}{4}}$ dans la première.

En vertu de l'expression de $\mathfrak{B}$ (p. 350), ce sera

$$(78)\quad 16\sum(2m+1)F[4k+3-(2m+1)^2-2(2m+1)-4(2m+1)\rho],$$

$m$ étant entier positif, $\rho$ entier positif ou nul, et la somme s'étendant à toutes les valeurs de $m$, $\rho$ qui ne rendent pas négative la quantité sur laquelle porte F.

La quantité (78), que nous désignerons par $\beta_k$, s'écrit évidemment

$$\beta_k = 16\sum_{h\geqq 0} F[4k+3-(4h+3)]\psi(4h+3),$$

$\psi(n)$ désignant, comme au n° **59**, la somme des diviseurs de $n$ inférieurs à $\sqrt{n}$.

Il faut maintenant développer de même la quantité (77) suivant les puissances de $q$; cette quantité est évidemment du type

$$\sum_{k=0} q^{k+\frac{3}{4}}\gamma_k;$$

on calcule $\gamma_k$ par nos méthodes ordinaires, et l'on trouve ainsi :

1° $k$ impair ...................... $\gamma_k = \sum\mu(\mu_2-\mu_1)$

2° $k$ pair ........................ $\gamma_k = 2\sum\nu_2(\nu_3-\nu_1)$

$\mu_1$, $\mu_2$ désignant les minima $\equiv 0 \pmod 4$ et $\mu$ le minimum $\equiv 2 \pmod 4$ d'une classe impropre quelconque de discriminant $4k+3$ ($k$ impair); $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$ ($\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3$) les minima d'une classe impropre quelconque de discriminant $4k+3$ ($k$ pair).

On obtient ainsi une nouvelle expression du coefficient de $q^{k+\frac{3}{4}}$ dans $\mathcal{E}$; c'est $\beta_k+\gamma_k$.

1° *Soit $k$ pair;* $k+\frac{3}{4}$ est du type $2k'+1-\frac{1}{4}$; comme il n'y a pas de tels termes dans $\mathcal{E}$, il reste $\beta_k+\gamma_k=0$, c'est-à-dire, en faisant

$k = 2\text{M}$,

$$8\sum_{h\geqq 0} \text{F}[8\text{M}+3-(4h+3)]\psi(4h+3) = \sum \nu_2(\nu_3-\nu_1);$$

la dernière somme porte sur les classes impropres de discriminant $8\text{M}+3$, et $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$ désignent les trois minima d'une quelconque de ces classes ($\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3$).

2° *Soit k impair;* $k = 2\text{N}-1$; on trouve, en égalant $\beta_k+\gamma_k$ à la valeur (75) de $\alpha_\text{N}$,

$$8\sum_{h\geqq 0} \text{F}[8\text{N}-1-(4h+3)]\psi(4h+3) = \sum \mu_1(\mu_2-\mu),$$

$\mu_1$, $\mu_2$ étant les deux minima $\equiv 0 \pmod 4$ et $\mu$ le minimum $\equiv 2 \pmod 4$ d'une classe impropre quelconque de discriminant $8\text{N}-1$, ($\mu_1 \leqq \mu_2$).

**73.** *Quatrième évaluation de* $\alpha_\text{N}$. — On partira des formules :

$$\eta_1^3\theta_1^2\theta\frac{\text{H}^2\text{H}_1}{\Theta^3} = -2\sum_0 (2m+1)^2\frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1+q^{2m+1}}\cos(2m+1)x + \frac{1}{2}\eta_1\theta_1^4\theta\frac{\text{H}_1}{\Theta},$$

$$\theta\frac{\text{H}_1\Theta_1}{\Theta} = \quad 2\sum_0 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}[1-2q^{-1}+\ldots+2(-1)^m q^{-m^2}]\cos(2m+1)x;$$

une suite de calculs analogues conduira aux deux relations ci-dessous, où les notations du numéro précédent sont conservées et où $\varphi(n)$ désigne la somme des diviseurs *impairs* de $n$ :

$$32\sum_{h\geqq 0} \text{F}(8\text{N}-1-4h)[2(-1)^{h+1}-1]\varphi(h) = \sum(\mu_1^2+\mu_2^2-\mu^2),$$

$$32\sum_{h\leqq 0} \text{F}(8\text{M}+3-4h)[2(-1)^h \quad +1]\varphi(h) = \sum(\nu_1^2\ +\nu_2^2\ +\nu_3^2).$$

On fera $\varphi(0) = \frac{1}{24}$ et l'on ne comptera que pour $\frac{1}{3}$ la classe $(2a, a, 2a)$.

**74.** En introduisant de même le terme en $\cos x$ du développement

trigonométrique de

$$\eta_1^2 \theta_1^3 \theta^2 \frac{H_1 \Theta_1^2 H^2}{\Theta^4},$$

on arriverait à des résultats dont nous ne citerons ici qu'un seul,

$$8 \sum_{h \geqq 0} F[4N - (4h+1)] \psi(4h+1)$$
$$= \sum m_1(m_1 + m_2 - m) \left[1 - (-1)^{\frac{m}{4}}\right],$$

la dernière somme s'étendant aux classes propres de discriminant $4N$, $m_1$, $m_2$ étant les deux minima impairs ($m_1 \leqq m_2$), $m$ le minimum pair d'une telle classe.

Enfin $\psi(4h+1)$ a le sens précis indiqué au n° **59**; c'est, si $4h+1$ non carré, la somme des diviseurs du nombre $4h+1$ *inférieurs* à sa racine carrée; si $4h+1 = \delta^2$, c'est cette même somme augmentée de $\frac{1}{2}\delta$.

---

# DEUXIÈME PARTIE.

## APPLICATIONS DE LA TRANSFORMATION DU TROISIÈME ORDRE.

---

## CHAPITRE I.

### FORMULES DÉDUITES DES DÉVELOPPEMENTS FONDAMENTAUX.

**75.** Rappelons d'abord les relations suivantes, qui appartiennent à la transformation du troisième ordre des fonctions thêta (¹) :

$$-C\, H(3x, q^3) = H(x) H\left(x - \frac{\pi}{3}\right) H\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

(¹) *Voir*, par exemple, WEBER, *Elliptische Functionen*, § 28.

$$\mathrm{C}\,\mathrm{H}_1(3x, q^3) = \mathrm{H}_1(x)\mathrm{H}_1\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{H}_1\left(x+\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\mathrm{C}\,\Theta\,(3x, q^3) = \Theta\,(x)\,\Theta\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\Theta\left(x+\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\mathrm{C}\,\Theta_1(3x, q^3) = \Theta_1(x)\Theta_1\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\Theta_1\left(x+\frac{\pi}{3}\right),$$

la constante C ayant pour valeur $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\eta_1\theta_1\theta : \mathrm{H}\left(\frac{\pi}{3}\right)$; on a d'ailleurs directement pour $\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ la valeur $\sqrt{3}\,\eta(q^3)$, en désignant par $\eta(q)$, avec M. Weber, la fonction

$$\eta(q) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m q^{3m^2+m+\frac{1}{12}} = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m q^{\frac{(6m+1)^2}{12}}.$$

On conclut immédiatement des relations précédentes

$$(79)\qquad \begin{cases} \mathrm{H}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\,\eta(q^3), \\ \mathrm{H}_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = \eta(q^3)\dfrac{\sqrt{\theta\theta_1}}{\sqrt{\theta(q^3)\theta_1(q^3)}}, \\ \Theta\left(\frac{\pi}{3}\right) = \eta(q^3)\dfrac{\sqrt{\eta_1\theta_1}}{\sqrt{\eta_1(q^3)\theta_1(q^3)}}, \\ \Theta_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = \eta(q^3)\dfrac{\sqrt{\eta_1\theta}}{\sqrt{\eta_1(q^3)\theta(q^3)}}. \end{cases}$$

**76.** Lemme. — Faisons $x = \frac{\pi}{3}$ dans le développement classique

$$\eta_1^2\theta_1^2\frac{\mathrm{H}^2}{\Theta^2} = 8\sum_1 \frac{mq^m}{1-q^{2m}} - 8\sum_1 \frac{mq^m}{1-q^{2m}}\cos 2mx;$$

il vient, en vertu de (79),

$$(80)\qquad 3\eta_1\theta_1\eta_1(q^3)\theta_1(q^3) = 8\sum_1 \frac{mq^m}{1-q^{2m}}\left(1-\cos\frac{2m\pi}{3}\right).$$

D'ailleurs (n° **14**),

$$\eta_1\theta_1 = \tfrac{1}{2}\eta_1^2\left(q^{\frac{1}{2}}\right),\qquad \eta_1(q^3)\theta_1(q^3) = \tfrac{1}{2}\eta_1^2\left(q^{\frac{3}{2}}\right);$$

quant à $\cos\frac{2m\pi}{3}$, c'est 1, si $m\equiv 0 \pmod 3$, et $-\frac{1}{2}$ dans tout autre cas. Si maintenant on égale les coefficients de $q^N$ dans les deux membres de (80), on obtient immédiatement ce théorème :

*Le nombre des décompositions de* 8N *selon la formule*

$$8N = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + 3(2z+1)^2 + 3(2t+1)^2,$$

*où* $x, y, z, t$ *sont entiers, positifs, nuls ou négatifs, est égal à seize fois la somme des diviseurs de* N *dont les conjugués sont impairs et qui ne sont pas multiples de* 3.

**77.** *Relations déduites de la formule fondamentale* (10). — Dans cette formule (10), qui s'écrit

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \eta_1\theta_1 H_1\Theta_1 \frac{H^2}{\Theta^2} &= 2H_1(x,\sqrt{q})\sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{8}} F(8\nu+7) - 4\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{8}} \\ &\times \left[(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{8}} + (2m-5)q^{-\frac{(2m-5)^2}{8}} + \ldots\right]\cos(2m+1)x, \end{aligned}\right.$$

faisons $x=\frac{\pi}{3}$. Le premier membre, en vertu de (79), est

$$3\eta_1(q^9)\theta_1(q^3)H_1\left(\frac{\pi}{3}\right)\Theta_1\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ou, d'après le n° **14**,

$$\frac{3}{2}\eta_1^2\left(q^{\frac{3}{2}}\right)\frac{1}{2}\eta_1(\sqrt{q})H_1\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{q}\right),$$

c'est-à-dire

$$(81)\qquad \frac{3}{4}\eta_1^2\left(q^{\frac{3}{2}}\right)\eta_1\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}.$$

Le second membre est

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} &2\sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{8}} F(8\nu+7)\times\sum_\infty q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\cos(2m+1)\frac{\pi}{3} \\ &-4\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\left[(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{8}} + (2m-5)q^{-\frac{(2m-5)^2}{8}} + \ldots\right]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}. \end{aligned}\right.$$

Égalons les coefficients de $q^N$ dans les deux expressions (81) et (82).

Dans (81), on doit poser

$$(83)\quad 8N = 3(2z+1)^2 + 3(2t+1)^2 + (2y+1)^2 + (2m+1)^2 \quad \left(z, t, y, m \gtreqless 0\right)$$

et prendre la somme

$$(84)\qquad \frac{3}{4}\sum \cos(2m+1)\frac{\pi}{3},$$

étendue à toutes les décompositions (83) de 8N.

Or :

1° Si $N \equiv 0 \pmod 3$, $2y+1$ et $2m+1$, dans (83), sont $\equiv 0 \pmod 3$; donc $\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}$ est $-1$, et la somme (84), c'est-à-dire le coefficient de $q^N$ dans (81), est $-\frac{3}{4}\mathfrak{N}$, où $\mathfrak{N}$ désigne le nombre des représentations (83), nombre calculé d'une manière générale au n° **76**.

2° Si $N \equiv -1 \pmod 3$, l'un des entiers $2y+1$, $2m+1$ est $\equiv 0 \pmod 3$, l'autre $\equiv \pm 1 \pmod 3$; d'ailleurs, on a évidemment

$$\frac{3}{4}\sum \cos(2m+1)\frac{\pi}{3} = \frac{3}{8}\sum\left[\cos(2m+1)\frac{\pi}{3} + \cos(2y+1)\frac{\pi}{3}\right],$$

et comme, au second membre, un des cosinus est $-1$, l'autre $+\frac{1}{2}$, la somme (84) est égale à $-\frac{3}{16}\mathfrak{N}$.

3° Si $N \equiv +1 \pmod 3$, comme $2y+1$ et $2m+1$ sont tous deux $\equiv \pm 1 \pmod 3$, $\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}$ est $\frac{1}{2}$, et la somme (84) est $\frac{3}{8}\mathfrak{N}$.

Cherchons maintenant le coefficient de $q^N$ dans (82).

Dans la première ligne de (82), c'est évidemment

$$2\sum_{m \gtreqless 0} F[8N - (2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}.$$

Dans la seconde ligne, il faut poser

$$(85)\qquad 8N = (2m+1)^2 - (2\mu-1)^2, \qquad m, \mu \geqq 1, \qquad \mu < m,$$

$m$ et $\mu$ étant de plus de même parité, et prendre la somme

$$-4\sum(2\mu-1)\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}.$$

Or on écrit (85)

$$2N=(m-\mu+1)(m+\mu)=\delta\delta_1,$$

$\delta_1$, c'est-à-dire $m+\mu$, étant pair, et $\delta$, ou $m-\mu+1$, impair, puisque $m$ et $\mu$ sont de même parité; de plus $\delta<\delta_1$. On en conclut immédiatement que, dans la seconde ligne de (82), le coefficient cherché est

$$-4\sum(\delta_1-\delta)\cos(\delta_1+\delta)\frac{\pi}{3},$$

la somme s'étendant aux décompositions, déjà rencontrées au n° **56**,

$$2N=\delta\delta_1,\qquad \delta_1 \text{ pair},\ \delta \text{ impair},\qquad \delta<\delta_1.$$

Il ne reste plus qu'à égaler les deux valeurs trouvées pour le coefficient considéré.

Auparavant, faisons $x=0$ dans (10), et égalons, dans les deux membres, les coefficients de $q^N$; nous trouvons immédiatement la formule

$$(86)\qquad 0=\sum_{m\gtreqless 0}F[8N-(2m+1)^2]-2\sum(\delta_1-\delta),$$

la dernière somme s'étendant aux mêmes décompositions $2N=\delta\delta_1$ que ci-dessus.

**78.** *Formules finales.* — Maintenant, égalons les valeurs obtenues pour le coefficient de $q^N$ dans (81) et (82).

1° $N\equiv-1 \pmod 3$. On a (n° **76**) $\mathfrak{N}=16\sum d'$, $d'$ étant un diviseur quelconque de N à conjugué impair; et, par suite,

$$-\frac{3}{16}16\sum d'=2\sum_{m\gtreqless 0}F[8N-(2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}-4\sum(\delta_1-\delta)\cos(\delta_1+\delta)\frac{\pi}{3}.$$

Quand on pose $2N = \delta\delta_1$, d'où $\delta\delta_1 \equiv 1 \pmod 3$, on voit que $\delta_1$ et $\delta$ sont simultanément $\equiv +1$ ou $\equiv -1 \pmod 3$; l'un étant pair, l'autre impair, $\delta_1 + \delta$ est impair et $\equiv \pm 2 \pmod 3$, c'est-à-dire que $\delta_1 + \delta$ est $6h+1$ ou $6h+5$; donc

$$\cos(\delta_1 + \delta)\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

On a ainsi

$$-3\sum d' = 2\sum_{m \gtreqless 0} F[8N - (2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3} - 2\sum(\delta_1 - \delta).$$

Combinant avec (86), et observant encore que $\cos[(2m+1)\pi : 3]$ est $-1$, si $2m+1 \equiv 0 \pmod 3$, et $\frac{1}{2}$ en tout autre cas, *on obtient les deux formules*

$$\left.\begin{array}{ll} (87) & \displaystyle\sum_{\mu \gtreqless 0} F[8N - 9(2\mu+1)^2] = \sum d' \\ (88) & \displaystyle\sum_{\rho \gtreqless 0} F[8N - (6\rho \pm 1)^2] = -\sum d' + 2\sum(\delta_1 - \delta) \end{array}\right\} N \equiv -1 \pmod 3,$$

$d'$ désignant tout diviseur de N à conjugué impair, et la dernière somme s'étendant aux décompositions $2N = \delta\delta_1$ où $\delta_1 > \delta$, $\delta_1$ pair, $\delta$ impair.

2° $N \equiv +1 \pmod 3$. On a de même

$$6\sum d' = 2\sum_{m \gtreqless 0} F[8N - (2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3} - 4\sum(\delta_1 - \delta)\cos(\delta_1 + \delta)\frac{\pi}{3}.$$

Ici, par $2N = \delta\delta_1$, la somme $\delta_1 + \delta$ est impaire et $\equiv 0 \pmod 3$; donc $\cos[(\delta_1 + \delta)\pi : 3]$ est $-1$, et l'on trouve, en combinant avec (86),

$$\left.\begin{array}{ll} (89) & \displaystyle\sum_{\rho \gtreqless 0} F[8N - (6\rho \pm 1)^2] = 2\sum d' \\ (90) & \displaystyle\sum_{\mu \gtreqless 0} F[8N - 9(2\mu+1)^2] = -2\sum d' + 2\sum(\delta_1 - \delta) \end{array}\right\} N \equiv 1 \pmod 3,$$

$d'$, $\delta$, $\delta_1$ ayant même signification que ci-dessus.

3° $N \equiv 0 \pmod 3$. On a

$$-12\sum d'' = 2\sum_{m \gtreqless 0} F[8N-(2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3} - 4\sum(\delta_1-\delta)\cos(\delta_1+\delta)\frac{\pi}{3},$$

$d''$ désignant (n° **76**) tout diviseur de N *non multiple de* 3 et à conjugué impair.

Ici (à moins que N ne soit pas divisible par 9), $\cos(\delta_1+\delta)\frac{\pi}{3}$ n'a pas une valeur fixe; on peut écrire, d'ailleurs,

$$\cos(\delta_1+\delta)\frac{\pi}{3} = -1 + \frac{3}{2}\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)^2,$$

le *symbole de Jacobi*, $\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)$, étant nul si $\delta_1+\delta \equiv 0 \pmod 3$.

La combinaison avec (86) donne

$$\left.\begin{aligned}
&(91)\quad \sum_{\rho \gtreqless 0} F[8N-(6\rho\pm1)^2] = -4\sum d'' + 2\sum(\delta_1-\delta)\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)^2\\
&(92)\quad \sum_{\mu \gtreqless 0} F[8N-9(2\mu+1)^2] = 4\sum d'' + 2\sum(\delta_1-\delta)\left[1-\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)^2\right]
\end{aligned}\right\} N \equiv 0 \pmod 3,$$

$d''$ désigne tout diviseur de N non multiple de 3 et à conjugué impair; $\delta_1$ et $\delta$ ont la même signification que plus haut.

**79.** *Remarque.* — Si N, multiple de 3, ne l'est pas de 9, le symbole de Jacobi qui figure dans les deux dernières formules est égal à $\pm 1$; si, de plus, on observe que $4\Sigma d'' = \Sigma d'$, $d'$ désignant *tout* diviseur de N à conjugué impair, on voit que les formules (92) et (91) coïncident avec (87) et (88).

Ainsi, pour $N \equiv 0 \pmod 3$, et non $\equiv 0 \pmod 9$, les formules (87) et (88) subsistent.

**80.** *Formules complémentaires.* — On peut, *par voie élémentaire*, obtenir des formules analogues aux précédentes, et dans lesquelles $8N+4$ remplacerait $8N$. On part, pour cela, de la relation

d'Hermite (n° **8**) :

$$\eta_1^3(\sqrt{q}) = 8\sum_0 q^{\frac{8\nu+3}{8}} F(8\nu+3);$$

et l'on multiplie les deux membres par $H_1\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{q}\right)$; on égale ensuite, dans les deux nouveaux membres, les coefficients de $q^{\frac{1}{2}(2N+1)}$. Calculons ceux-ci.

Au premier membre, il faut poser

$$(93)\quad \begin{cases} 8N+4 = (2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2+(2t+1)^2, \\ (x, y, z, t \gtreqless 0) \end{cases}$$

et prendre $\sum \cos(2t+1)\frac{\pi}{3}$ étendu aux représentations (93).

Au second membre, on a, pour le coefficient cherché,

$$8\sum_{m \gtreqless 0} F[8N+4-(2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}.$$

Distinguons maintenant divers cas.

1° $N \equiv -1 \pmod 3$. Alors, dans le second membre de (93), deux des quantités au carré sont $\equiv 0 \pmod 3$, les deux autres sont $\equiv \pm 1$; dès lors, on a

$$\sum \cos(2t+1)\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}\sum\left[\cos(2x+1)\frac{\pi}{3}+\ldots+\cos(2t+1)\frac{\pi}{3}\right] = \sum\frac{1}{4}\left(-1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right);$$

c'est-à-dire que cette somme est $-\mathfrak{N}:4$, $\mathfrak{N}$ désignant le nombre des représentations (93), qui est égal, comme on sait, à 16 fois la somme des diviseurs de $2N+1$.

On a donc

$$8\sum_{m \gtreqless 0} F[8N+4-(2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3} = -4\Phi(2N+1).$$

Mais, si l'on avait multiplié les deux membres de la relation d'Her-

mite par $H_1(0, \sqrt{q})$, on aurait trouvé de même

$$(94) \qquad 8\sum_{m \gtreqless 0} F[8N+4-(2m+1)^2] = 16\Phi(2N+1),$$

*formule valable quel que soit* N. En combinant les deux dernières relations, on trouve

$$\left.\begin{aligned} &(95) \quad \sum_{\mu \gtreqless 0} F[8N+4-9(2\mu+1)^2] = \Phi(2N+1) \\ &(96) \quad \sum_{\rho \gtreqless 0} F[8N+4-\ (6\rho \pm 1)^2] = \Phi(2N+1) \end{aligned}\right\} N \equiv -1 \pmod 3,$$

$\Phi(n)$ désignant la somme des diviseurs de $n$.

2° $N \equiv 1 \pmod 3$. En ce cas, $8N+4 \equiv 0 \pmod 3$; *supposons que* $8N+4$ *ne soit pas multiple de* 9 (¹), on trouve

$$\left.\begin{aligned} &(97) \quad 2\sum_{\mu \gtreqless 0} F[8N+4-9(2\mu+1)^2] = \ \Phi(2N+1) \\ &(98) \quad 2\sum_{\rho \gtreqless 0} F[8N+4-\ (6\rho \pm 1)^2] = 3\Phi(2N+1) \end{aligned}\right\} N \equiv +1 \pmod 3.$$

3° $N \equiv 0 \pmod 3$. Le nombre $8N+4$ étant $\equiv 1 \pmod 3$, les décompositions (93) sont des deux types :

$$(99) \qquad 8N+4 = 9(2x'+1)^2 + 9(2y'+1)^2 + 9(2z'+1)^2 + (2t'+1)^2,$$

$$(100) \qquad 8N+4 = \ (2x''+1)^2 + \ (2y''+1)^2 + \ (2z''+1)^2 + (2t''+1)^2,$$

les carrés non précédés du facteur 9 n'étant pas multiples de 3.

Soient $\mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{N}''$ les nombres des décompositions (99) et (100); on a

$$\begin{aligned} \sum \cos(2t+1)\frac{\pi}{3} &= \frac{1}{4}\sum{}' \left[3(2x'+1)\frac{\pi}{3} + \ldots + (2t'+1)\frac{\pi}{3}\right] + \sum{}'' \cos(2t''+1)\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{4}\sum{}' \left(-1-1-1+\frac{1}{2}\right) + \sum{}'' \frac{1}{2} = -\frac{5}{8}\mathfrak{N}' + \frac{1}{2}\mathfrak{N}''. \end{aligned}$$

(¹) Si $8N+4 \equiv 0 \pmod 9$, on obtient aisément les formules correspondantes.

Par suite

$$8 \sum_{m \gtreqless 0} F[8N + 4 - (2m + 1)^2] \cos(2m + 1)\frac{\pi}{3} = -\frac{5}{8}\mathfrak{N}' + \frac{1}{2}\mathfrak{N}''.$$

En combinant avec (94), et observant que $\mathfrak{N}' + \mathfrak{N}''$ est égal à $16\Phi(2N + 1)$, on trouve

$$(101) \quad 24 \sum_{\mu \gtreqless 0} F[8N + 4 - 9(2\mu + 1)^2] = \frac{9}{4}\mathfrak{N}'. \qquad N \equiv 0 \pmod 3).$$

D'ailleurs, *a priori*, $\mathfrak{N}'$ n'est pas connu explicitement.

Cette formule, bien qu'ainsi incomplète, nous sera utile plus loin (n° **86**).

Nous allons passer maintenant aux applications de la formule fondamentale (9).

**81**. *Lemme.* — Dans la relation bien connue

$$\theta^2 \theta_1^2 \frac{H^2}{H_1^2} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + 8 \sum_1 \frac{(-1)^m m q^{2m}}{1 - q^{2m}} (1 - \cos 2mx),$$

faisons $x = \frac{\pi}{3}$; nous arrivons, en imitant la marche suivie au n° **76**, à cette proposition qui, d'ailleurs, n'est pas nouvelle :

*Le nombre des représentations de* N *par la forme*

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 + t^2$$

*est égal à*

$$4(-1)^N \sum d(-1)^d \left(\frac{d}{3}\right)^2,$$

la somme s'étendant à *tous* les diviseurs $d$, de N, et le *symbole de Jacobi*, $\left(\frac{d}{3}\right)$, étant nul, si $d \equiv 0 \pmod 3$, selon une convention classique.

**82.** — *Relations déduites de la formule fondamentale* (9). — Prenons la relation, déduite de (9) par changement de $x$ en $x + \frac{\pi}{2}$,

$$(9')\quad \left\{\begin{aligned} \theta\theta_1 \frac{H^2\Theta_1\Theta}{H_1^2} &= \frac{1}{\cos^2 x} + 4\Theta(2x, q^2)\sum_0 (-1)^\nu q^{2\nu} J(\nu) \\ &- 8\sum_2 (-1)^m q^{2m^2}\left[-2q^{-2} + \ldots + (-1)^m 2mq^{-2m^2}\right]\cos 4mx \\ &+ 8\sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left[q^{-\frac{1}{2}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right]\cos(4m+2)x. \end{aligned}\right.$$

et faisons-y successivement $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$; égalons ensuite, dans les deux membres, les coefficients de $q^{2N}$ ($N > 0$).

Il vient, pour $x = 0$,

$$0 = 4\sum_{m \gtreqless 0} (-1)^N J(N - m^2) - 8\sum (-1)^{\delta_1}(\delta_1 - \delta),$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $N = \delta\delta_1$, où $\delta < \delta_1$. Nous poserons, dans ce qui suit,

$$(102)\qquad U(N) = \sum (-1)^{\delta_1}(\delta_1 - \delta);$$

de sorte que l'on a

$$(103)\qquad \sum_{m \gtreqless 0} J(N - m^2) = 2(-1)^N U(N).$$

Faisons maintenant $x = \frac{\pi}{3}$ dans (9′); le premier membre, en vertu de (79), est

$$3\theta_1(q^3)\theta(q^3)\Theta\left(\frac{\pi}{3}\right)\Theta_1\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

c'est-à-dire, (n° **14**),

$$(104)\qquad 3\theta^2(q^6)\theta(q^2)\Theta\left(\frac{2\pi}{3}, q^2\right) \quad \text{ou} \quad 3\theta^2(q^6)\theta(q^2)\sum_{-\infty}(-1)^m q^{2m^2} e^{\frac{4mi\pi}{3}}.$$

Le coefficient de $q^{2N}$ dans (104) s'obtient comme il suit :

Posons

$$(105)\qquad \begin{cases} 2N = 6x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 2m^2 \\ \qquad\text{c'est-à-dire} \\ N = 3x^2 + 3y^2 + z^2 + m^2, \end{cases}$$

le coefficient cherché sera

$$(106)\qquad 3\sum(-1)^{x+y+z+m} e^{\frac{4mi\pi}{3}} \qquad \text{ou} \qquad 3(-1)^N \sum e^{\frac{4mi\pi}{3}},$$

quantité évidemment réelle, et dont la valeur dépend de la valeur de N (mod 3).

1° $N \equiv -1 \pmod 3$. — Alors, dans (105), $m \equiv \pm 1 \pmod 3$, et la partie réelle de $e^{\frac{4mi\pi}{3}}$, c'est-à-dire $\cos(4m\pi : 3)$ est $-1 : 2$; l'expression (106) est donc

$$-\frac{3}{2}(-1)^N \mathfrak{N},$$

$\mathfrak{N}$ désignant ici le nombre des décompositions (105), c'est-à-dire, en vertu du n° **81**,

$$(106')\qquad -\frac{3}{2}4\sum(-1)^d d,$$

la somme s'étendant aux diviseurs de N.

2° $N \equiv +1 \pmod 3$. — Dans (105), une des quantités $z, m$ est $\equiv \pm 1$, l'autre $\equiv 0 \pmod 3$; dès lors

$$3(-1)^N \sum e^{\frac{4mi\pi}{3}} = \frac{3}{2}(-1)^N \sum\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}(-1)^N \mathfrak{N},$$

de sorte que la valeur de l'expression (106) est

$$(106'')\qquad \frac{3}{4}4\sum(-1)^d d.$$

3° $N \equiv 0 \pmod 3$. — Dans (105), $m \equiv 0 \pmod 3$; la valeur de

l'expression (106) est donc $3(-1)^N \mathfrak{N}$ ou (nº 81)

$$(106''') \qquad 3.4\sum(-1)^d d\left(\frac{d}{3}\right)^2,$$

somme étendue aux diviseurs de N.

Il faut maintenant calculer de même le coefficient de $q^{2N}$ au second membre de (9′), après qu'on y a fait $x = \frac{\pi}{3}$.

On trouve, sans difficulté,

$$(107) \qquad \begin{cases} 4(-1)^N \sum\limits_{m \gtrless 0} J(N - m^2) e^{\frac{4mi\pi}{3}} \\ \qquad - 8\sum(-1)^{\delta_1}(\delta_1 - \delta)\cos\frac{2\pi}{3}(\delta_1 + \delta), \end{cases}$$

la dernière somme s'étendant toujours aux décompositions

$$N = \delta\delta_1, \qquad \delta < \delta_1.$$

Il ne reste plus qu'à égaler (107) à (106′), (106″), (106‴), selon les trois cas distingués pour obtenir les formules cherchées.

**85.** *Premières formules.* — 1º $N \equiv -1 \pmod 3$. — L'égalité de (107) et de (106′) donne, si l'on observe que (107) est réel et que $\delta_1 + \delta \equiv 0 \pmod 3$,

$$4(-1)^N \sum_{m \gtrless 0} J(N - m^2)\cos\frac{4m\pi}{3} = -6\sum d(-1)^d + 8\sum(-1)^{\delta_1}(\delta_1 - \delta).$$

La dernière somme est U(N), par (102). Combinant avec (103), on trouve

$$(108) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{\sigma \gtrless 0} J[N - (3\sigma \pm 1)^2] = \quad (-1)^N \sum d(-\ )^d, \\ \sum\limits_{\nu \gtrless 0} J(N - 9\nu^2) \qquad = -(-1)^N \sum d(-1)^d + 2(-1)^N U(N); \end{cases}$$

$d$ désigne un diviseur quelconque de N.

2° $N \equiv +1 \pmod 3$. — On a, en égalant (107) et (106″), et combinant ensuite avec (103) :

$$(109)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\nu \gtreqless 0} J(N-9\nu^2) = \frac{1}{2}(-1)^N \sum d(-1)^d, \\ \sum\limits_{\sigma \gtreqless 0} J[N-(3\sigma \pm 1)^2] = \frac{-1}{2}(-1)^N \sum d(-1)^d + 2(-1)^N U(N). \end{cases}$$

3° $N \equiv 0 \pmod 3$. — On trouve de même

$$(110)\quad \begin{cases} (-1)^N \sum\limits_{\sigma \gtreqless 0} J[N-(3\sigma \pm 1)^2] \\ \quad = -2\sum (-1)^d d\left(\frac{d}{3}\right)^2 + 2\sum (-1)^{\delta_1}(\delta_1 - \delta)\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)^2; \end{cases}$$

et l'autre somme se déduira immédiatement de celle-là par (103). Si N n'est pas multiple de 9, on a $\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)^2 = 1$.

**84.** *Formules complémentaires.* — Partons de la relation de Kronecker :

$$\theta_1^3 = 12 \sum E(\nu) q^\nu,$$

où $E(\nu) = F(\nu) - F_1(\nu)$, et multiplions les deux membres par $\theta_1$. Nous trouvons, en égalant ensuite les coefficients de $q^N$, et utilisant le résultat classique sur le nombre de décompositions de N en quatre carrés,

$$(111)\qquad 12 \sum_{m \gtreqless 0} E(N-m^2) = 8[2+(-1)^N]\varphi(N),$$

$\varphi(N)$ désignant la somme des diviseurs *impairs* de N.

Multiplions de même les deux membres de la relation de Kronecker par $\Theta_1\left(\frac{\pi}{3}\right)$, il vient

$$(112)\qquad 12 \sum_{m \gtreqless 0} E(N-m^2)\cos 2m\frac{\pi}{3} = \sum \cos\frac{2\pi t}{3},$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions

$$(113) \qquad \mathrm{N} = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

1° $\mathrm{N} \equiv -1 \pmod{3}$. — Dans (113), deux des $x, y, z, t$ sont $\equiv 0$, les deux autres $\equiv \pm 1 \pmod{3}$; donc, dans (112),

$$\sum \cos\frac{2\pi t}{3} = \frac{1}{4}\sum\left(\cos 2\pi\frac{x}{3} + \ldots + \cos 2\pi\frac{t}{3}\right)$$
$$= \sum \frac{1}{4}\left(1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \sum \frac{1}{4} = \frac{1}{4}8[2 + (-1)^{\mathrm{N}}]\varphi(\mathrm{N}).$$

Combinant alors (111) et (112), on trouve

$$(114) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu \gtreqless 0} \mathrm{E}(\mathrm{N} - 9\nu^2) \qquad = \frac{1}{3}[2 + (-1)^{\mathrm{N}}]\varphi(\mathrm{N}), \\ \displaystyle\sum_{\sigma \lesseqgtr 0} \mathrm{E}[\mathrm{N} - (3\sigma \pm 1)^2] = \frac{1}{3}[2 + (-1)^{\mathrm{N}}]\varphi(\mathrm{N}). \end{cases}$$

2° $\mathrm{N} \equiv 0 \pmod{3}$ *et non* $\equiv 0 \pmod{9}$. — Dans (113), un seul des $x, y, z, t$ est $\equiv 0 \pmod{3}$, et l'on trouve sans difficulté, en combinant (111) et (112),

$$(115) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum \mathrm{E}(\mathrm{N} - 9\nu^2) \qquad = \frac{1}{6}[2 + (-1)^{\mathrm{N}}]\varphi(\mathrm{N}), \\ \displaystyle\sum \mathrm{E}[\mathrm{N} - (3\sigma \pm 1)^2] = \frac{1}{2}[2 + (-1)^{\mathrm{N}}]\varphi(\mathrm{N}). \end{cases}$$

3° $\mathrm{N} \equiv 0 \pmod{9}$. — Dans (113), un seul des $x, y, z, t$ est $\equiv 0 \pmod{3}$, ou tous le sont. Soient $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_4$ les nombres respectifs de ces deux sortes de décompositions.

Le calcul de $\sum \cos\frac{2\pi t}{3}$ dans (112) donne

$$12\sum \mathrm{E}(\mathrm{N} - m^2)\cos\frac{2m\pi}{3} = -\frac{1}{8}\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_4.$$

d'où, à l'aide de (111),

$$(116)\qquad \begin{cases} \sum E(N-9\nu^2) = \frac{1}{48}\mathfrak{M}_1 + \frac{1}{12}\mathfrak{M}_4, \\ \sum E[N-(3\sigma\pm 1)^2] = \frac{1}{16}\mathfrak{M}_4. \end{cases}$$

D'ailleurs, on a évidemment

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_4 = 8[2+(-1)^N]\varphi(N), \qquad \mathfrak{M}_4 = 8[2+(-1)^N]\varphi\left(\frac{N}{9}\right).$$

4° $N \equiv 1 \pmod 3$. — Soient $\mathfrak{N}_3$ et $\mathfrak{N}_0$ les nombres des décompositions (113) dans lesquelles 3 ou 0 des $x, y, z, t$ sont multiples de 3; en calculant $\sum \cos\frac{2\pi t}{3}$ dans (112), on trouve

$$12\sum E(N-m^2)\cos\frac{2m\pi}{3} = \frac{5}{8}\mathfrak{N}_3 - \frac{1}{2}\mathfrak{N}_0,$$

d'où, par combinaison avec (111),

$$(117)\qquad \begin{cases} \sum E(N-9\nu^2) = \frac{1}{16}\mathfrak{N}_3, \\ \sum E[N-(3\sigma\pm 1)^2] = \frac{3}{8}\mathfrak{N}_3 + \frac{3}{2}\mathfrak{N}_0. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$\mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}_0 = 8[2+(-1)^N]\varphi(N);$$

de plus, *si* N *est pair*, il est aisé d'établir, par voie élémentaire, que $\mathfrak{N}_0 = 2\mathfrak{N}_3$. *En ce cas, on peut donc calculer* $\mathfrak{N}_3$ *et* $\mathfrak{N}_0$, c'est-à-dire les seconds membres des formules (117). Si N est impair, il ne semble y avoir aucune relation simple entre $\mathfrak{N}_3$ et $\mathfrak{N}_0$.

85. *Formules définitives. Premier cas :* $N \equiv -1 \pmod 3$. — En réunissant les quatre formules (108) et (114), on obtient les quatre

formules qui leur sont équivalentes :

$$4\sum_{\sigma \gtrless 0} F\,[N-(3\sigma\pm 1)^2] = \sum d_p + 2\sum d_i,$$

$$4\sum F_1[N-(3\sigma\pm 1)^2] = \sum d_p - \tfrac{2}{3}[1+2(-1)^N]\sum d_i,$$

$$4\sum_{\nu \gtrless 0} F\,(N-9\nu^2) = -\sum d_p + 2[1+(-1)^N]\sum d_i + 2(-1)^N U(N),$$

$$4\sum F_1(N-9\nu^2) = -\sum d_p - \tfrac{2}{3}[1-(-1)^N]\sum d_i + 2(-1)^N U(N);$$

$d_i$ et $d_p$ désignent respectivement, *ici comme plus bas*, les diviseurs impairs et pairs de N ; et l'on a posé

$$U(N) = \sum (-1)^{\delta_1}(\delta_1 - \delta),$$

somme étendue aux décompositions en facteurs $N = \delta_1\delta$, avec $\delta \leqq \delta_1$.

*Deuxième cas :* $N \equiv 0 \pmod 3$ *et non* $\equiv 0 \pmod 9$. — On trouve, par (110) et (115),

$$4\sum_{\nu \gtrless 0} F\,(N-9\nu^2) = \tfrac{1}{2}\sum d_p + \sum d_i,$$

$$4\sum F_1(N-9\nu^2) = \tfrac{1}{2}\sum d_p - \tfrac{1}{3}[1+2(-1)^N]\sum d_i,$$

$$4\sum_{\sigma \gtrless 0} F\,[N-(3\sigma\pm 1)^2] = -\tfrac{1}{2}\sum d_p + [3+2(-1)^N]\sum d_i + 2(-1)^N U(N),$$

$$4\sum F_1[N-(3\sigma\pm 1)^2] = -\tfrac{1}{2}\sum d_p - \sum d_i + 2(-1)^N U(N).$$

*Troisième cas :* $N \equiv 0 \pmod 9$. — Il faut combiner cette fois (110) et (116). Les formules sont un peu plus compliquées, et nous n'en

donnerons que deux :

$$4\sum_{\sigma=0} F[N-(3\sigma\pm 1)^2] = \frac{3}{2}[2+(-1)^N]\left[\varphi(N)-\varphi\left(\frac{N}{9}\right)\right]$$
$$-(-1)^N 2\sum(-1)^d d\left(\frac{d}{3}\right)^2$$
$$+(-1)^N 2\sum(-1)^{\delta_1}(\delta_1-\delta)\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)^2,$$

$$4\sum F_1[N-(3\sigma\pm 1)^2] = -\frac{1}{2}[2+(-1)^N]\left[\varphi(N)-\varphi\left(\frac{N}{9}\right)\right]$$
$$-(-1)^N 2\sum(-1)^d d\left(\frac{d}{3}\right)^2$$
$$+(-1)^N 2\sum(-1)^{\delta_1}(\delta_1-\delta)\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)^2;$$

$\varphi(N)$ est la somme des diviseurs impairs de $N$; $d$ un diviseur quelconque de $N$; $\delta_1$ et $\delta$ sont des diviseurs conjugués de $N$, $N=\delta\delta_1$ et $\delta<\delta_1$. Enfin $\left(\frac{d}{3}\right)$ et $\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)$ sont les symboles de Jacobi, nuls si leurs numérateurs sont multiples de 3.

*Quatrième cas :* $N\equiv 1 \pmod 3$ *et pair.* — La combinaison de (109) et de (117), où $\mathfrak{N}_3$ et $\mathfrak{N}_0$ sont remplacées par leurs valeurs, donne les relations

$$4\sum_{\nu=0} F(N-9\nu^2) = \frac{1}{2}\sum d_p + \sum d_i,$$

$$4\sum F_1(N-9\nu^2) = \frac{1}{2}\sum d_p - \sum d_i,$$

$$4\sum_{\sigma=0} F[N-(3\sigma\pm 1)^2] = -\frac{1}{2}\sum d_p + 5\sum d_i + 2U(N),$$

$$4\sum F_1[N-(3\sigma\pm 1)^2] = -\frac{1}{2}\sum d_p - \sum d_i + 2U(N).$$

Ces formules coïncident avec celles du second cas, lorsque N est supposé pair dans celles-ci.

*Cinquième cas :* $N \equiv 1 \pmod 3$ *et impair.* — Il ne paraît pas possible d'obtenir de relations analogues aux précédentes, parce que, dans (117), $\mathfrak{N}_3$ et $\mathfrak{N}_0$ sont inconnus. Bien entendu, les formules (109), en J, subsistent; nous verrons plus loin qu'on peut encore les compléter (n° **88**).

**86.** *Formules liées à la fonction modulaire du tétraèdre.* — La multiplication complexe de la fonction modulaire du tétraèdre a conduit à des formules plus simples, mais moins étendues que les précédentes, et qui sont comprises dans celles-ci.

Ces formules, qu'on trouvera au Tome II (p. 234) des *Modulfunctionen* de MM. Klein et Fricke, sont relatives aux nombres de classes où le coefficient moyen est indifféremment pair et impair; elles donnent, dans les notations ci-dessus, les deux sommes *totales :*

$$(118)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum F(N-9\nu^2) \qquad\quad + \sum F_1(N-9\nu^2) \qquad\quad + \sum F_1[4N-9(2\mu+1)^2], \\ \sum F[N-(3\sigma\pm 1)^2] + \sum F_1[N-(3\sigma\pm 1)^2] + \sum F_1[4N-(6\rho\pm 1)^2]. \end{array}\right.$$

Or nos formules des n$^{os}$ **78**, **80** et **85** donnent chacune des sommes *partielles* qui figurent dans ces expressions; il n'y a qu'un seul cas d'exception, celui de $N \equiv 1 \pmod 3$ et impair, c'est-à-dire $N = 6M+1$.

Voici comment on peut, dans ce cas, évaluer les deux sommes (118).

On a, en ajoutant membre à membre la première équation (117) et la première (109), et observant que N est impair,

$$2\sum_{\nu=0} G(N-9\nu^2) = \frac{1}{16}\mathfrak{N}_3 + \frac{1}{2}\sum d,$$

G étant $F+F_1$, et $d$ un diviseur quelconque de N.

On a ensuite, par (101), puisque $F_1(8h+3) = \frac{1}{3}F(8h+3)$, et que $4N \equiv 4 \pmod 8$,

$$\sum_{\mu \lessgtr 0} F_1[4N-9(2\mu+1)^2] = \frac{1}{32}\mathfrak{N}';$$

la première somme (118) est donc égale à

$$\frac{1}{32}(\mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}') + \frac{1}{4}\sum d;$$

$\mathfrak{N}_3$ est le nombre des décompositions de N en quatre carrés dont trois sont multiples de 3; $\mathfrak{N}'$ celui des décompositions de 4N en quatre carrés *impairs*, dont trois sont multiples de 3. Or il est bien facile d'établir, d'une manière élémentaire, que

$$\mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}' = 8\sum d;$$

et, dès lors, la première somme (118) a pour valeur $\frac{1}{2}\sum d$, c'est-à-dire moitié de la somme des diviseurs de N, ce qui est la formule donnée par MM. Klein et Fricke.

La seconde somme (118) s'évalue de même et se prête à la même vérification.

87. *Remarque.* — Les relations (103) et (111) donnent par combinaison :

$$2\sum_{m \leqq 0} F(N - m^2) = (-1)^N U(N) + [2 + (-1)^N]\,\varphi(N),$$

$$2\sum F_1(N - m^2) = (-1)^N U(N) - \frac{1}{3}[2 + (-1)^N]\,\varphi(N).$$

Ces relations reviennent aux formules I, II, IV et V de Kronecker (¹); la seconde est plus générale que la formule IV, en ce qu'elle ne suppose pas N impair.

Rappelons que $\varphi(N)$ est la somme des diviseurs impairs de N.

---

(¹) Les formules I, II, V donnent $\sum F(N - m^2)$, selon qu'on suppose N multiple de 4, N impairement pair, N impair; IV donne $\sum G(N - m^2)$ pour N impair. *Voir* aussi la formule XI (n° 134) du *Report* de St. Smith.

**88**. *Dernières formules*. — On a évidemment, $C_0$ désignant une contante en $x$,

$$\left.\begin{aligned} C_0 H\left(x, q^{\frac{1}{3}}\right) &= H(x) H\left(x - \frac{\pi\tau}{3}\right) H\left(x + \frac{\pi\tau}{3}\right) \\ C_0 H_1\left(x, q^{\frac{1}{3}}\right) &= H_1(x) H_1\left(x - \frac{\pi\tau}{3}\right) H_1\left(x + \frac{\pi\tau}{3}\right) \\ C_0 \Theta\left(x, q^{\frac{1}{3}}\right) &= \Theta(x) \Theta\left(x - \frac{\pi\tau}{3}\right) \Theta\left(x + \frac{\pi\tau}{3}\right) \\ C_0 \Theta_1\left(x, q^{\frac{1}{3}}\right) &= \Theta_1(x) \Theta_1\left(x - \frac{\pi\tau}{3}\right) \Theta_1\left(x + \frac{\pi\tau}{3}\right) \end{aligned}\right\} \quad (q = e^{i\pi\tau}),$$

d'où l'on déduit, sans qu'il soit utile de déterminer $C_0$,

$$\Theta\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) : H\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) = -i \frac{\sqrt{\eta_1 \theta_1}}{\sqrt{\eta_1\left(q^{\frac{1}{3}}\right) \theta_1\left(q^{\frac{1}{3}}\right)}},$$

$$\Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) : H\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) = -i \frac{\sqrt{\eta_1 \theta}}{\sqrt{\eta_1\left(q^{\frac{1}{3}}\right) \theta\left(q^{\frac{1}{3}}\right)}},$$

$$H_1\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) : H\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) = -i \frac{\sqrt{\theta \theta_1}}{\sqrt{\theta\left(q^{\frac{1}{3}}\right) \theta_1\left(q^{\frac{1}{3}}\right)}}.$$

1° Faisant $x = \frac{\pi\tau}{3}$ dans la formule (10), et imitant la marche suivie au n° **77**, on arrive à la relation ci-dessous, où N désigne un entier quelconque $\equiv -1 \pmod 3$ :

$$(119) \qquad \sum_{\rho \geq 0} F\left[\frac{8N - (6\rho \pm 1)^2}{9}\right] = -\sum d' + \frac{2}{3} \sum (\delta_1 - \delta),$$

$d'$ désignant tout diviseur de N à conjugué impair; et la dernière somme s'étendant aux décompositions $2N = \delta\delta_1$, où $\delta < \delta_1$, $\delta_1$ pair, $\delta$ impair. Naturellement, $\rho$ ne prend que les valeurs telles que $8N - (6\rho \pm 1)^2$ soit positif et multiple de 9. Cette formule se place à côté de la formule (88).

2° Si maintenant on fait $x = \frac{\pi\tau}{3}$ dans (9'), (n° **82**), on trouve de

même, en désignant par N un entier quelconque $\equiv 1 \pmod 3$,

$$(120) \quad \sum_{\sigma = 0} \mathrm{J}\left[\frac{\mathrm{N} - (3\sigma \pm 1)^2}{9}\right] = (-1)^{\mathrm{N}}\left[\frac{2}{3}\mathrm{U}(\mathrm{N}) - \frac{1}{2}\sum d_p + \frac{1}{2}\sum d_i\right],$$

les notations du n° **85** étant conservées.

D'ailleurs, on reconnaît immédiatement qu'on a

$$(121) \qquad \sum_{\sigma = 0} \mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{N} - (3\sigma \pm 1)^2}{9}\right] = \frac{1}{4}\mathfrak{N}_3,$$

$\mathfrak{N}_3$ étant toujours le nombre de décompositions de N en quatre carrés, dont trois sont multiples de 3.

Donc, *si* N *est pair*, c'est-à-dire si N, qui est $3h + 1$, est du type $6\mathrm{M} + 4$, $\mathfrak{N}_3$ est connu (n° **84**, 4°), et la combinaison des formules (120) et (121) donne les relations :

$$4\sum_{\sigma \gtreqless 0} \mathrm{F}\left[\frac{6\mathrm{M} + 4 - (3\sigma \pm 1)^2}{9}\right] = \frac{2}{3}\mathrm{U}(\mathrm{N}) - \frac{1}{2}\sum d_p + \sum d_i,$$

$$4\sum_{\sigma \leqq 0} \mathrm{F}_1\left[\frac{6\mathrm{M} + 4 - (3\sigma \pm 1)^2}{9}\right] = \frac{2}{3}\mathrm{U}(\mathrm{N}) - \frac{1}{2}\sum d_p + \frac{1}{3}\sum d_i.$$

Si N est impair, on n'a pas de pareilles formules ; toutefois, si l'on élimine $\mathfrak{N}_3$ entre (121) et la première équation (117), on obtient une relation entre les quatre sommes (où l'on a écrit $h$ au lieu de $3\sigma \pm 1$) :

$$\sum \mathrm{F}(\mathrm{N} - 9\nu^2); \quad \sum \mathrm{F}_1(\mathrm{N} - 9\nu^2); \quad \sum \mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{N} - h^2}{9}\right); \quad \sum \mathrm{F}_1\left(\frac{\mathrm{N} - h^2}{9}\right).$$

Ces sommes sont d'ailleurs liées par la première équation (109), et par (120) ; on peut donc de plusieurs manières former une relation qui ne contienne que deux d'entre elles ; on a, par exemple,

$$4\sum_{\nu, \sigma \ldots 0} \left\{ \mathrm{F}(\mathrm{N} - 9\nu^2) - 3\mathrm{F}\left[\frac{\mathrm{N} - (3\sigma \pm 1)^2}{9}\right] \right\} = 2\Phi(\mathrm{N}) + 2\mathrm{U}(\mathrm{N}),$$

N étant du type $6\mathrm{M} + 1$, et $\Phi(\mathrm{N})$ étant la somme de ses diviseurs [1].

---

[1] On déduirait sans difficulté des relations de ce paragraphe la formule de

# CHAPITRE II.

## NOUVEAUX DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

**89.** *Développement de* $H_1\Theta_1 H : \Theta$. — Dans les deux formules d'Hermite :

$$(122)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta_1 \frac{H\Theta_1}{\Theta} = 2\sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left[1+2q^{-1}+\ldots+2q^{-m^2}\right]\sin(2m+1)x,\\ &\eta_1 \frac{HH_1}{\Theta} = 4\sum_1 q^{m^2}\left(q^{-\frac{1}{4}}+\ldots+q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right)\sin 2mx, \end{aligned}\right.$$

changeons $x$ en $2x$, $q$ en $q^2$ ; en vertu du n° **14**, nous avons ainsi les développements de

$$\frac{1}{2}HH_1\frac{\Theta_1^2+\Theta^2}{\Theta\Theta_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}HH_1\frac{\Theta_1^2-\Theta^2}{\Theta\Theta_1},$$

car, par les relations quadratiques entre les thêta,

$$\eta_1^2(H_1^2-H^2) = 2\theta_1^2(q^2)(\Theta_1^2-\Theta^2).$$

Dès lors, par addition, on a le développement de $H_1\Theta_1 H : \Theta$; c'est-à-dire qu'on l'obtient en ajoutant les seconds membres des relations (122), où $x$ et $q$ sont remplacés par $2x$ et $q^2$.

Ainsi

$$(123)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{H_1\Theta_1 H}{\Theta} = {} & 2\sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}(1+2q^{-2}+\ldots+2q^{-2m^2})\sin(4m+2)x\\ & + 4\sum_1 q^{2m^2}\left(q^{-\frac{1}{2}}+\ldots+q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right)\sin 4mx. \end{aligned}\right.$$

---

MM. Klein-Fricke (*loc. cit.*) qui donne, dans la notation de ces géomètres, la somme $\sum H\left(\frac{4N-k^2}{9}\right)$, lorsque $N \equiv 1 \pmod 3$.

Cette formule a déjà été donnée par Biehler (*loc. cit.*, p. 31), qui l'établit directement.

**90.** *Développement de* $H^2H_1^2\Theta_1 : \Theta^2$. — On applique la méthode de Liouville (n° **5**) en considérant simultanément

$$\eta_1 H^2 H_1^2 \Theta_1 : \Theta^2 \quad \text{et} \quad \eta_1 \Theta^2 \Theta_1^2 H_1 : H^2;$$

on trouve ainsi, sans difficulté,

$$\begin{aligned}\eta_1 \frac{H^2H_1^2\Theta_1}{\Theta^2} = {} & \mathcal{L}\Theta_1(3x, q^3) + \mathcal{M}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(3m+1)^2}{3}} \cos(6m+2)x \\ & - 4\sum_1 q^{3m^2}\left[3q^{-\frac{3}{4}} + \ldots + 3(2m-1)q^{-\frac{3(2m-1)^2}{4}}\right]\cos 6mx \\ & - 4\sum_1 q^{\frac{(3m+1)^2}{3}}\left[5q^{-\frac{25}{12}} + \ldots + (6m-1)q^{-\frac{(6m-1)^2}{12}}\right]\cos(6m+2)x \\ & - 4\sum_0 q^{\frac{(3m+2)^2}{3}}\left[q^{-\frac{1}{12}} + \ldots + (6m+1)q^{-\frac{(6m+1)^2}{12}}\right]\cos(6m+4)x.\end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ désignent des coefficients, jusqu'ici indéterminés, et dont la recherche est le point délicat de notre étude.

**91.** *Détermination de* $\mathcal{L}$. — Multiplions membre à membre les deux développements (n$^{os}$ **5** et **89**) :

$$\eta_1 \frac{HH_1}{\Theta} = 4\sum_1 q^{m^2}\left(q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right)\sin 2mx,$$

$$\begin{aligned}\frac{H_1\Theta_1 H}{\Theta} = {} & 2\sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left(1 + 2q^{-2} + \ldots + 2q^{-2m^2}\right)\sin(4m+2)x \\ & + 2\sum_1 q^{2m^2}\left(2q^{-\frac{1}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right)\sin 4mx,\end{aligned}$$

et égalons, dans les deux membres nouveaux, développés en séries de

Fourier, les termes indépendants de $x$. Il vient :

$$\frac{1}{4}\mathfrak{L} = \sum_1 q^{6m^2}\left(q^{-\frac{1}{4}}+\ldots+q^{-\frac{(4m-1)^2}{4}}\right)\left(2q^{-\frac{1}{2}}+\ldots+2q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right)$$
$$+\sum_0 q^{\frac{3}{2}(2m+1)^2}\left(q^{-\frac{1}{4}}+\ldots+q^{-\frac{(4m+1)^2}{4}}\right)(1+2q^{-2}+\ldots+2q^{-2m^2}).$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{4}\mathfrak{L} = \sum_0 q^{2N+1+\frac{1}{4}}\sigma_N,$$

$\sigma_N$ étant un coefficient indépendant de $q$, on voit de suite, par l'expression précédente de $\mathfrak{L}$, que $\sigma_N$ est le nombre des solutions entières $x$, $y$, $z$ de l'équation

$$(124) \qquad 8N+5 = 6x^2 - z^2 - 2y^2,$$

satisfaisant aux conditions

$$(125) \qquad x > 0, \qquad 0 \leqq z \leqq 2x-1, \qquad -x+1 \leqq y \leqq x-1.$$

Enfin, observons, en vertu même de (124), que $z$ est impair et que $x$ et $y$ sont de parités contraires.

Écrivons maintenant (124) de la manière suivante :

$$3(8N+5) = 3(3x+y-z)(3x+y+z) - 9(x+y)^2,$$

et faisons correspondre à la solution $x$, $y$, $z$ la forme $(\alpha, 3\beta, 3\gamma)$ :

$$\varphi = (3x+y-z)X^2 + 6(x+y)XY + 3(3x+y+z)Y^2;$$

d'où, pour $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, en utilisant aussi (125), les conditions

$$(126) \quad \begin{cases} \alpha > \beta > 0, \qquad \gamma \geqq \alpha, \qquad \alpha+\gamma-4\beta > 0, \\ \gamma-\alpha \equiv 0 \pmod 2, \qquad \gamma+\alpha-2\beta \equiv 0 \pmod 4). \end{cases}$$

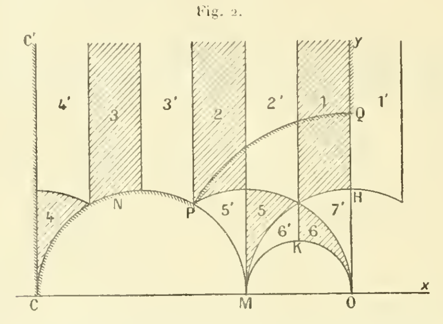
D'après cela, $\varphi$ est une forme positive, de discriminant $3(8N+5)$.

Les *inégalités* (126) expriment que le point représentatif de $\varphi$ est (*fig.* 2) dans la région $\mathcal{R}$, limitée par le contour $C'CNPQy$ (contour renforcé par un liséré); le point ne peut être *sur* ce contour, sauf sur l'arc PQ ([1]).

De plus, $z$ étant impair, $x$ et $y$ étant de parités contraires, on voit que $3x + y \pm z$ est pair, c'est-à-dire que $\varphi$ est de l'ordre impropre.

Donc enfin, $\sigma_N$ est égal au nombre *des formes* $\varphi$, c'est-à-dire des formes positives, impropres, de discriminant $3(8N+5)$, du type $(\alpha, 3\beta, 3\gamma)$, dont le point représentatif est dans $\mathcal{R}$, et telles que $\gamma + \alpha - 2\beta \equiv 0 \pmod 4$.

Fig. 2.




Supposons d'abord que $8N+5$ ne soit pas multiple de 3, et cherchons combien il *peut* y avoir de formes $\varphi$ équivalentes à une réduite donnée $(a, b, c)$, de l'ordre impropre et de discriminant $3(8N+5)$.

1° $b > 0$. — La réduite $\varphi_1 = (a, b, c)$ a son point représentatif dans la région ombrée 1; ses équivalentes dans 2, 3, 4 ([2]) sont respectivement :

$$\varphi_2 = (a,\ a+b,\ a+2b+c), \qquad \varphi_3 = (a,\ 2a+b,\ 4a+4b+c),$$
$$\varphi_4 = (c,\ 3c-b,\ 9c-6b+a).$$

---

([1]) O est l'origine; O$x$, O$y$ les axes respectifs des quantités réelles et des quantités purement imaginaires; PQ est un arc de cercle, de centre O et de rayon $\sqrt{3}$; OM = 1.

([2]) C'est-à-dire des équivalentes dont les points représentatifs sont dans 2, 3, 4.

Une seule *peut* être une forme $\varphi$. Car, si $a$ n'est pas multiple de 3, une et une seule des quantités $b$, $a+b$, $2a+b$ est multiple de 3; une et une seule des formes $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ a donc son coefficient moyen $\equiv 0 \pmod 3$, et le coefficient extrême l'est aussi, puisque le discriminant est multiple de 3.

Si $a \equiv 0 \pmod 3$, $\varphi_4$ seule peut être une forme $\varphi$ et ne peut l'être que dans ce cas.

2° $b < 0$ [1]. — La réduite $(a, b, c)$ a son point dans 1′; elle a une équivalente dans chacune des régions 2′, 3′, 4′; on reconnaît de suite qu'une seule des *quatre* formes *peut* être une forme $\varphi$.

Il faut maintenant examiner dans quels cas *la* forme, équivalente à la réduite $(a, b, c)$, qui *peut* être une forme $\varphi$, l'est effectivement; on arrive sans difficulté aux résultats qui suivent :

1° $c \equiv 0 \pmod 3$, (*d'où* $b \equiv 0$). — La classe $(a, b, c)$ contient *une* forme $\varphi$ :

$$\text{si } b > 0, \qquad \text{quand on a} \qquad c \leqq 3a$$

et que $a$, $c$ ne sont pas simultanément multiples de 4;

$$\text{si } b < 0, \qquad \text{quand} \qquad c \equiv 0 \qquad \pmod 4.$$

2° $a \equiv 0 \pmod 3$, (*d'où* $b \equiv 0$). — La classe $(a, b, c)$ contient *une* forme $\varphi$ :

$$\text{si l'on a, à la fois, } b > 0, \qquad a \equiv 0 \qquad \pmod 4.$$

3° $a + 2b + c \equiv 0 \pmod 3$. — La classe $(a, b, c)$ contient *une* forme $\varphi$ :

$$\text{si l'on a, à la fois, } a + 2b + c \leqq 3a \qquad \text{et} \qquad c \equiv 0 \qquad \pmod 4.$$

4° $a - 2b + c \equiv 0 \pmod 3$. — La classe $(a, b, c)$ contient *une* forme $\varphi$ si $a$ et $c$ ne sont pas simultanément multiples de 4.

Ces quatre cas épuisent toutes les hypothèses possibles, à cause de

---

[1] $b = 0$ est impossible, la forme $(a, b, c)$ étant impropre et de discriminant impair.

$ac - b^2 \equiv 0 \pmod 3$ ; les conditions indiquées sont nécessaires et suffisantes.

On peut maintenant, et c'est cette idée qui va nous conduire au but, associer à la solution $x, y, z$ de (124), au lieu de la forme $\varphi$, une forme $(\alpha', 3\beta', 3\gamma')$, ou $\psi$, définie par

$$\alpha' = 3x + y + z, \qquad \beta' = x + y, \qquad \gamma' = 3x + y - z,$$

ce qui revient à changer $z$ en $-z$ dans les coefficients de $\varphi$.

Les coefficients de $\psi$, qui est une forme *impropre*, de discriminant $3(8N+5)$, satisfont uniquement à

$$\alpha' \geqq \gamma' > \beta' > 0, \qquad \alpha' + \gamma' \quad 4\beta' > 0, \qquad \alpha' + \gamma' - 2\beta' \equiv 0 \pmod 4.$$

Le coefficient cherché, $\sigma_N$, est donc aussi égal au nombre des formes $\psi$.

Les inégalités montrent que le point représentatif de $\psi$ est dans le quadrilatère curviligne MKOHQPM. En procédant comme plus haut, on établit ce qui suit, où $(a, b, c)$ désigne encore une réduite impropre quelconque, de discriminant $3(8N+5)$.

1° $c \equiv 0 \pmod 3$. — La classe $(a, b, c)$ contient *une* forme $\psi$ :

si $b > 0$, quand à la fois $c \leqq 3a$ et $a - c \equiv 2 \pmod 4$,
si $b < 0$, quand $a \equiv 0 \pmod 4$.

2° $a \equiv 0 \pmod 3$. — La classe $(a, b, c)$ contient *une* forme $\psi$ :

si $b > 0$, quand $c \equiv 0 \pmod 4$,
si $b < 0$, quand $a - c \equiv 2 \pmod 4$.

3° $a + 2b + c \equiv 0 \pmod 3$. — La classe $(a, b, c)$ contient *une* forme $\psi$ :

si, à la fois, $a + 2b + c \leqq 3a$ et $c \equiv 0$ (mod. 4).

4° $a - 2b + c \equiv 0 \pmod 3$. — La classe $(a, b, c)$ contient une forme $\psi$ :

si $a \equiv 0 \pmod 4$.

Cela posé, $\sigma_N$, égal au nombre des formes $\varphi$, comme à celui des formes $\psi$, est la demi-somme de ces deux nombres.

On en conclut que $2\sigma_N$ est égal au nombre des classes de formes de l'ordre impropre, et de discriminant $3(8N+5)$.

En effet, soient $(a, b, c)$ et $(a, -b, c)$ deux réduites opposées, non équivalentes (c'est-à-dire non ambiguës), représentant deux de ces classes, opposées entre elles; la relation $ac - b^2 \equiv 7 \pmod 8$ montre que $a$ et $c$ ne sont pas simultanément $\equiv 2 \pmod 4$. Dès lors, les deux Tableaux ci-dessus montrent aisément que, dans chacun des quatre cas, et quelles que soient les valeurs de $a$ et $c \pmod 4$, les deux classes $(a, b, c)$ et $(a, -b, c)$ contiennent, *au total*, soit deux formes $\varphi$ et pas de $\psi$; soit deux formes $\psi$ et pas de $\varphi$; soit une forme $\varphi$ et une forme $\psi$; donc, deux classes opposées donnent deux unités dans le nombre total des formes $\varphi$ et $\psi$, c'est-à-dire encore qu'une classe non ambiguë donne une unité dans ce nombre total.

Le même fait se vérifie pour une classe ambiguë.

Donc enfin, $\sigma_N$, égal à la moitié du nombre total des formes $\varphi$ et $\psi$, est la moitié du nombre des classes impropres, de discriminant $3(8N+5)$.

Si $8N+5$ est multiple de 3, on constate que toute classe impropre de discriminant $3(8N+5)$ donne encore *une demi-unité* dans $\sigma_N$ si elle ne contient pas 3 en facteur; si elle contient ce facteur, elle donne *deux unités*.

Donc enfin, dans tous les cas,

$$2\sigma_N = F_1[3(8N+5)] + 3F_1\left(\frac{8N+5}{3}\right),$$

le dernier $F_1$ étant nul si $8N+5$ n'est pas multiple de 3, ou encore

$$\mathcal{L} = 2\sum_0 q^{\frac{8N+5}{4}}\left[F[3(8N+5)] + 3F\left(\frac{8N+5}{3}\right)\right],$$

car ici (n° **50**) les $F_1$ sont égaux aux F.

**92.** *Détermination de* $\mathfrak{M}$. — On multiplie encore membre à membre les deux développements introduits à propos de $\mathcal{L}$, au com-

mencement du n° **91**; le coefficient de $\cos 2x$ dans le second membre nouveau, développé en série de Fourier, est $\mathfrak{M} q^{\frac{1}{3}}$.

On trouve, en opérant comme plus haut, que

$$\frac{1}{4}\mathfrak{M} q^{\frac{1}{3}} = \sum q^{2N+\frac{1}{4}} \omega_N,$$

$\omega_N$ étant le nombre des solutions entières $x$, $y$, $z$ de

$$24N - 1 = 2x^2 - 3z^2 - 6y^2,$$

vérifiant

$$0 < 3z < 2x, \qquad -x < 3y < x.$$

En écrivant

$$24N - 1 = 3(x-y-z)(x-y+z) - (x-3y)^2,$$

et faisant correspondre à la solution $x$, $y$, $z$ successivement les deux formes

$$[x-y-z,\ x-3y,\ 3(x-y+z)] \quad [x-y+z,\ x-3y,\ 3(x-y-z)],$$

on trouve que $\omega_N$ est égal au nombre des classes de l'ordre impropre, de discriminant $24N-1$, ou que

$$\mathfrak{M} = 4\sum_1 q^{\frac{24N-1}{12}} F(24N-1).$$

**93.** *Développement de* $\theta_1 H^2 \Theta_1^2 H_1 : \Theta^2$. — Sans donner *in extenso* ce développement, qui nous serait inutile, disons seulement que les coefficients des termes en $\cos x$ et en $\cos 3x$ y sont respectivement

$$\mathfrak{F} = 2q^{\frac{1}{12}} \sum_{N=0}^{\infty} q^{\frac{3N+2}{3}} J(3N+2),$$

$$\mathfrak{L} = q^{\frac{3}{4}} \sum_{N=0}^{\infty} q^N \left[J(N) + 3J\left(\frac{N}{3}\right)\right],$$

$J\left(\frac{N}{3}\right)$ étant nul si N n'est pas multiple de 3, et $J(0)$ étant égal à $-\frac{1}{4}$, comme d'ordinaire.

Les développements des expressions analogues à $H^2H_1^2\Theta_1 : \Theta^2$ n'introduisent pas d'autres fonctions numériques que $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{X}$, $\mathfrak{L}$.

**94**. *Développements auxiliaires.* — En appliquant la méthode de Liouville (n° 5), et changeant ensuite $x$ en $x+\frac{\pi}{2}$, on obtient les quatre développements

$$H\,\Theta\,H_1 = A \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{3m^2+2m}\sin(6m+2)x,$$

$$H\,\Theta\,\Theta_1 = A q^{-\frac{1}{4}} \sum q^{3m^2+m}\sin(6m+1)x,$$

$$H_1\Theta_1 H = A \sum q^{3m^2+2m}(-1)^m\sin(6m+2)x,$$

$$H_1\Theta_1\Theta = A q^{-\frac{1}{4}} \sum q^{3m^2+2m}(-1)^m\cos(6m+1)x,$$

A étant un coefficient que la méthode laisse indéterminé, et qu'on calcule en faisant $x=0$ dans la dernière équation. On trouve ainsi

$$\eta_1\theta_1\theta = A q^{-\frac{1}{4}} \sum_{-\infty} q^{3m^2+m}(-1)^m.$$

Mais on connaît la relation classique (¹)

$$\eta_1\theta_1\theta = 2\eta^3,$$

étant posé

$$\eta = q^{\frac{1}{12}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{3m^2+m} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{\frac{1}{12}(6m+1)^2};$$

par suite

$$A = 2q^{\frac{1}{3}}\eta^2.$$

---

(¹) Par exemple, voir Weber, *Elliptische Functionen*, § 21.

**95.** *Corollaires.* — Dérivons en $x$ les trois premières relations du numéro précédent, et faisons ensuite $x = 0$; en tenant compte de ce que $H'(0)$ est $\eta_1 \theta_1 \theta$, et remplaçant A par sa valeur, on trouve

$$\eta_1 \theta\, \eta = q^{\frac{1}{3}} \sum_{-\infty} (6m+2) q^{3m^2+2m} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (6m+2) q^{\frac{(3m+1)^2}{3}},$$

$$\eta_1 \theta_1 \eta = q^{\frac{1}{3}} \sum (-1)^m (6m+2) q^{3m^2+2m} = \sum_{\infty} (-1)^m (6m+2) q^{\frac{(3m+1)^2}{3}},$$

$$\theta_1 \theta\, \eta = q^{\frac{1}{12}} \sum (6m+1) q^{3m^2+m} = \sum_{-\infty} (6m+1) q^{\frac{(6m+1)^2}{12}}.$$

On en déduirait immédiatement des conséquences arithmétiques, que nous laissons ici de côté parce qu'elles n'intéressent pas les nombres de classes.

## CHAPITRE III.

### CONSÉQUENCES DES NOUVEAUX DÉVELOPPEMENTS.

**96.** Multiplions membre à membre les relations (nos **94** et **5**)

$$H_1 \Theta_1 H = A \sum_{-\infty} q^{3m^2+2m} (-1)^m \sin(6m+2)x,$$

$$\eta_1^2 \theta_1 \theta \frac{HH_1}{\Theta^2} = 8 \sum_{0} \frac{mq^m}{1+q^{2m}} \sin 2mx,$$

et égalons les termes indépendants de $x$ dans les deux membres nouveaux. Nous trouvons, en tenant compte de la valeur de A, l'équation

$$\frac{1}{4} \xi \eta q^{-\frac{1}{3}} = \sum_{0} (-1)^m \frac{q^{3m^2+5m+1}(3m+1)}{1+q^{6m+2}} + \sum_{0} (-1)^m \frac{q^{3m^2+7m+3}(3m+2)}{1+q^{6m+4}}.$$

Égalant ensuite, dans les deux membres, les coefficients de $q^{2N+1}$, on

obtient sans difficulté la formule :

$$\sum_{m \gtreqless 0} (-1)^m \left\{ F\left[24N+16-(6m+1)^2\right] + 3F\left[\frac{24N+16-(6m+1)^2}{9}\right] \right\}$$
$$= -2\sum d\left(\frac{3}{d+d_1}\right),$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $6N+4=dd_1$, avec $d<d_1$, et $d$, $d_1$ étant de parités différentes (¹).

**97**. De même, en égalant, dans les deux membres du produit considéré au commencement du numéro précédent, les termes en $\cos x$, on obtient l'expression de $\mathfrak{M}\eta$, et la formule :

$$\sum_{m \lesseqgtr 0} (-1)^m F[24N-(6m+1)^2] = -\sum d\left(\frac{3}{d+d_1}\right);$$

la dernière somme s'étend aux décompositions $6N=dd_1$, avec $d<d_1$, $d$ et $d_1$ étant de parités différentes, et un seul des deux étant multiple de 3.

**98**. En procédant de même à partir des développements de $H_1\Theta_1 H$ et $H\Theta_1 : \Theta^2$, on trouverait les expressions de $\mathfrak{N}\eta_1$, $\mathfrak{P}\eta$. De la première, on déduit cette formule

$$\sum_{m \gtreqless 0} (-1)^m J\left[\frac{12N+9-(6m+1)^2}{4}\right] = -\sum \delta\left(\frac{3}{\frac{\delta+\delta_1}{2}}\right),$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $12N+9=\delta\delta_1$, avec $\delta<\delta_1$, et un seul des deux facteurs $\delta$, $\delta_1$ étant multiple de 3.

(¹) $\left(\frac{3}{d+d_1}\right)$ est le symbole de Jacobi. Ici, $d+d_1$ ne peut être multiple de 3, car $dd_1 \equiv 1 \pmod 3$. Au premier membre, la seconde fonction F est nulle si $24N+16-(6m+1)^2$ n'est pas multiple de 9.

**99.** *Formules du premier type de Liouville.* — Multiplions membre à membre les relations (nos **66** et **94**),

$$\eta_1^2 \theta_1^2 \theta^2 \frac{H_1 \Theta_1 H}{\Theta^3} = 8 \sum_0 \frac{m^2 q^m}{1 - q^{2m}} \sin 2mx,$$

$$\frac{1}{A} H \Theta H_1 = \sum_{-\infty} q^{3m^2+2m} \sin(6m+2)x,$$

et égalons, dans les développements des deux membres nouveaux, les termes indépendants et les termes en $\cos x$; nous obtenons ainsi les valeurs de

$$\mathcal{L}\, \theta \eta \theta_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}\, \theta \eta \theta_1.$$

Par exemple, on a

$$\mathcal{L}\, q^{-\frac{1}{3}} \theta \eta \theta_1 = 4 \sum_0 (3m+1)^2 \frac{q^{3m^2+5m+1}}{1 - q^{6m+2}} - 4 \sum_0 (3m+2)^2 \frac{q^{3m^2+7m+3}}{1 - q^{6m+4}}.$$

Si maintenant on remplace $\theta\eta\theta_1$ par sa valeur (n° **95**), on trouve, en égalant les coefficients de $q^{2N+1}$ dans les deux membres, la formule :

$$\sum_{m \gtrless 0} (6m+1) \left\{ F[24N + 16 - (6m+1)^2] + 3F\left[\frac{24N + 16 - (6m+1)^2}{9}\right] \right\}$$
$$= 2 \sum \left(\frac{d}{3}\right) d^2,$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $6N + 4 = dd_1$, $d < d_1$ et $d$, $d_1$ de parités différentes.

L'expression de $\mathfrak{M}\, \theta\eta\theta_1$ conduit à la formule :

$$\sum_{m \gtrless 0} (6m+1) F[24N - (6m+1)^2] = - \sum \left(\frac{d + d_1}{3}\right) d^2,$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $6N = dd_1$, $d < d_1$, $d$ et $d_1$ de parités différentes, et un seul des deux multiple de 3.

De même, en formant $\mathfrak{X}\eta\theta\eta_1$, on aura

$$\sum_{m \gtreqless 0} (3m+1)\, J[3N-(3m+1)^2] = \sum \left(\frac{\delta+\delta_1}{3}\right)\delta^2,$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $3N = \delta\delta_1$, avec $\delta < \delta_1$, $\delta$ et $\delta_1$ de même parité, et un seul des deux étant multiple de 3. Dès lors cette somme est nulle si N est impairement pair.

**100.** *Relations où intervient la forme $x^2+3y^2$.* — On peut obtenir, d'une manière simple, des formules qui rappellent celles du *second type de Kronecker*.

Multiplions, en effet, par $\eta$ les deux membres la relation classique (n° 9),

$$\eta_1^2\theta_1 = 4\sum_0 q^{\nu+\frac{1}{2}} F(4\nu+2),$$

il vient, en utilisant l'expression de $\eta_1\theta_1\eta$ (n° 95),

$$\eta_1 \sum_{-\infty} q^{\frac{(3m+1)^2}{3}} (-1)^m (6m+2) = 4\sum_0 q^{\nu+\frac{1}{2}} F(4\nu+2) \times \sum_{-\infty} (-1)^m q^{\frac{(6m+1)^2}{12}}.$$

D'où, en égalant les coefficients de $q^{N+\frac{7}{12}}$, la formule :

$$4\sum_{m \gtreqless 0} (-1)^m F\left[\frac{12N+7-(6m+1)^2}{3}\right] = \sum b(-1)^{\frac{b}{2}-1},$$

la dernière somme s'étendant aux représentations $12N+7 = 3a^2+b^2$, avec $a \gtreqless 0$; $b \gtreqless 0$, et de plus $b$ (qui est nécessairement pair) étant du type $6h+2$.

En opérant de même sur la relation

$$\eta_1\theta_1^2 = 4\sum_0 q^{\nu+\frac{1}{4}} F(4\nu+1),$$

on trouve

$$4\sum_{m \gtreqless 0} (-1)^m F\left[\frac{12N+4-(6m+1)^2}{3}\right] = 2\sum b(-1)^{b-1},$$

la dernière somme s'étendant aux représentations $3N+1 = 3a^2+b^2$, avec $a \gtreqless 0$; $b \gtrless 0$, et $b$ étant $\equiv 1 \pmod 3$).

**101**. *Relations où intervient la forme indéfinie* $x^2-6y^2$. — En multipliant membre à membre la relation (n° **14**) :

$$\frac{1}{\theta(q^2)} HH_1 = 2\sum_0 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \sin(4m+2)x,$$

et celle qui donne $\eta_1\theta_1\theta\, H_1\Theta_1 H : \Theta^2$ (n° **4**), on obtient les expressions de

$$\mathcal{L}\theta(q^2) \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}\,\theta(q^2),$$

qui conduisent immédiatement aux formules suivantes. D'abord :

$$\sum_{m \gtreqless 0}(-1)^m\left[F(24N+15-24m^2)+3F\left(\frac{8N+5-8m^2}{3}\right)\right]$$
$$= -2\sum(x-3y)(-1)^{\frac{x}{4}},$$

la dernière somme s'étendant aux représentations $16N+10 = x^2-6y^2$, avec $y>0$; $x>3y$ [$x$ est nécessairement $\equiv 0 \pmod 4$)]. Ensuite :

$$\sum_{m \gtreqless 0}(-1)^m F(24N-1-24m^2) = -\sum y\left(\frac{-1}{y}\right)(-1)^{\frac{x-2}{4}},$$

la dernière somme s'étendant aux représentations $48N-2 = x^2-6y^2$, avec $y>0$; $x>3y$ [$x$ est nécessairement $\equiv 2 \pmod 4$)].

**102**. Si l'on multiplie l'un par l'autre les développements de

$$\frac{1}{A} H_1\Theta_1 H \quad \text{et} \quad \eta_1\theta_1\theta\frac{\Theta}{\Theta^2}$$

(ce dernier déduit par dérivation du développement classique de $\eta_1\theta_1\theta : \Theta$), on trouve sans difficulté, en se reportant à la première formule du n° **45**, et calculant le terme indépendant et celui en $\cos 2x$ du produit, les deux relations suivantes. D'abord :

$$6\sum_{m \gtreqless 0}(-1)^m F_1\left[\frac{24N+19-(6m+1)^2}{6}\right] = -\sum\left(\frac{3}{x}\right)(x-3y),$$

la dernière somme s'étendant aux représentations

$$24N+19 = x^2-6y^2, \qquad y>0, \qquad x>3y.$$

Ensuite :

$$6\sum_{m \gtreqless 0}(-1)^m F_1\left[\frac{24N+1-(6m+1)^2}{6}\right] = -\sum\left(\frac{3}{x}\right)(x-3y),$$

la dernière somme s'étendant aux représentations

$$24N+1 = x^2-6y^2, \qquad y \geqq 0, \qquad x>3y.$$

Toutefois, si $24N+1$ est un carré, $a^2$, le terme $-\left(\frac{3}{a}\right)a$, qui provient de la représentation $x=a$, $y=0$, doit être divisé par 2 [1].

---

(1) L'impression de ce Travail était terminée quand j'ai eu communication de trois intéressants Mémoires, dont deux en langue tchèque, de M. Karel Petr, professeur à l'Université de Prague (*Acad. des Sciences de Bohême*, 1900-1901). M. Petr a complété, comme je l'ai fait (n° 8), la formule initiale d'Hermite, et donné les deux développements (9) et (10). Il en a déduit les formules (35) et (36) du premier type de Liouville et celles (40) à (44) du second type; enfin il a obtenu trois des formules du Chapitre IV, où figure la classe $x^2-2y^2$. C'est donc à lui que revient le mérite d'avoir fait apparaître une forme indéfinie dans les applications arithmétiques des fonctions elliptiques.

Lors du Centenaire d'Abel, le monde entier a témoigné par sa grandiose participation en quelle haute estime on avait ce génie transcendant.

Au moment où ils se disposent à lui élever un monument digne de lui, ses compatriotes ont cru ne pas devoir donner à leur manifestation un caractère exclusif, mais ont trouvé qu'ils rendraient mieux hommage au caractère international de l'œuvre d'Abel, en conviant les mathématiciens des autres nations à collaborer avec les Norvégiens.

Le monument, qui aura 13$^{m}$ de hauteur, est achevé en plâtre et prêt à être coulé en bronze. Il est dû au ciseau de Gustav Vigeland, le premier des sculpteurs norvégiens. Sur un haut piédestal planent deux génies de taille gigantesque sur le dos desquels repose le jeune voyant, dont les traits rendent, en une mâle adaptation, ceux de l'illustre Abel. Cette œuvre a excité l'admiration de connaisseurs distingués, même en dehors des limites de la Norvège.

Il s'agit ici de la mémoire d'un homme par lequel la Norvège a apporté une part contributive tout à fait unique à l'œuvre scientifique de tous les pays et de tous les âges : c'est pourquoi nous nous adressons en toute confiance à l'ensemble du monde savant.

W. C. BRÖGGER. Elling HOLST. Fridtjof NANSEN.

Carl STÖRMER. L. SYLOW. Axel THUE.

Kristiania, mars 1907.

# TABLE DES MATIÈRES.

## SIXIÈME SÉRIE. — TOME III.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

FIN DU TOME III DE LA SIXIÈME SÉRIE.

38896 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

Journal de mathématiques pures et appliquées

